УДК 512.556

О ПОЛУТЕЛАХ ОБОБЩЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Петухова Я.В.

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», Киров, e-mail: iaroslawa1987@mail.ru

В работе определяются и изучаются полутела обобщенных треугольных матриц. Полутелом называется алгебраическая структура с двумя бинарными операциями сложения и умножения, являющаяся группой по умножению и коммутативной полугруппой по сложению, причем умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Приведены основные понятия теории полутел, а также важнейшие примеры полутел обобщенных треугольных матриц. Более подробно рассмотрен частный случай матричных полутел – полутело верхних треугольных матриц n-го порядка с действительными коэффициентами. Сформулированы исходные свойства полутел обобщенных треугольных матриц. Представлен вид ядра матричного полутела, порожденного элементом 2. Получен критерий ограниченности полутела обобщенных треугольных матриц. Дана теорема о центре полутела обобщенных треугольных матриц. Как ее следствие получен критерий коммутативности полутела обобщенных треугольных матриц.

Ключевые слова: полутело, конгруэнция, ядро, кольцо разностей, обобщенная треугольная матрица, полутело обобщенных матриц

ABOUT SEMISKEWFIELDS GENERIC TRIANGULAR MATRIX

Petuhova Y.V.

Vyatka State Humanities University, Kirov, e-mail: iaroslawa1987@mail.ru

In the article semifields of generalized triangular matrices are defined and studied. Semifield is called an algebraic structure with two binary operations of addition and multiplication, which is a group under multiplication, and commutative semigroup under the addition, wherein the multiplication is distributive over the addition on both sides. The basic concepts of the theory of semifields, as well as important examples of semifields of generalized triangular matrices are given. The special case of matrix semifields is discussed in more detail. It is the semifield upper triangular matrices of n-th order with real coefficients. The initial properties of the semifields of generalized triangular matrices are formulated. The view of the kernel of the matrix semifield generated by the element 2 is represented. Criterion for the semifield of generalized triangular matrices to be limited is obtained. The theorem about the center of the semifield of generalized triangular matrices is given. As a corollary we obtain a criterion for the semifield of generalized triangular matrices to be commutative.

Keywords: semifield, congruence, kernel, ring of differences, generalized triangular matrix, semifield of generalized matrixes

Полутелом называется алгебраическая структура S с бинарными операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ такая, что $\langle S, \cdot\rangle$ − группа, $\langle S, +\rangle$ − коммутативная полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Полутело с коммутативным умножением называется *полуполем*. Основные понятия теории полутел можно найти в [1].

Кольцом разностей полутела S называется пара $\langle R, f\rangle$, где R − кольцо и $f : S \to R$ − полукольцевой гомоморфизм, удовлетворяющий условию универсальности: для любого гомоморфизма g: $S \to T$, где T − кольцо, существует единственный кольцевой гомоморфизм h: $R \to T$, такой, что $h \circ f = g$. Любое полутело S имеет кольцо разностей, однозначно определенное с точностью до изоморфизма над S. Заметим, что кольцо $R = \{0\}$ − нулевое в том и только в том случае, когда полутело S − зероидное, то есть $a + b = a$ для некоторых $a, b \in S$ [2].

Полутело с аддитивным сокращением $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ называется *сократимым* полутелом. Кольцом разностей сократимого полутела S является кольцо $R(S)$, содержащее S в качестве подполукольца, для которого $R(S) = S - S$ (здесь f − тождественное вложение S в $R(S)$).

Конгруэнцией на полутеле S называется любое отношение эквивалентности ρ на S, согласованное с операциями:

$$a\rho b,\ c\rho d \Rightarrow (a + c)\rho(b + d),\ (ac)\rho(bd)\ (\forall a, b, c, d \in S).$$

Ядром полутела называется класс единицы 1 произвольной конгруэнции на нем. Нетривиальное полутело называется *ограниченным*, если оно как ядро порождается элементом $2 = 1 + 1$.

Множество Con S всех ядер полутела S замкнуто относительно операций умножения и пересечения и образует полную модулярную алгебраическую решетку, которая изоморфна решетке всех конгруэнций полутела S по отношению включения.

Центром полутела S называется множество его элементов, коммутирующих с любым элементом из S. Легко видеть, что центр полутела S является подполутелом в S.

Пусть $\langle J, \leq\rangle$ – некоторое локально конечное упорядоченное множество, S – произвольное полутело и $\langle R, f\rangle$ – кольцо разностей для S.

Определим матричное полутело $T_J(S)$ следующим образом. Множество $T_J(S)$ состоит из всех таких обобщенных матриц $A = (a_{ij})_{J\times J}$, что $a_{ij} \in R$ для любых $i \neq j$ из J, $a_{ii} \in S$ при $i \in J$ и $a_{ij} = 0$, если неверно, что $i \leq j$. [3]

Сложение матриц производится поэлементно. Для матриц $(a_{ij})_{J\times J}$ и $(b_{ij})_{J\times J}$ их произведение имеет вид $(c_{ij})_{J\times J}$, где $c_{ij} = \sum_{i\leq k\leq j} a_{ik}b_{kj}$ при $i \leq j$ и $c_{ij} = 0$ в противном случае. При этом $a_{ii}b_{ik} \in S$ для $k = i$ и $a_{ii}b_{ik} = f(a_{ii})b_{ik} \in R$ для $k > i$.

Теорема 1. $\langle T_J(S), +, \cdot\rangle$ – полутело, которое будет сократимым тогда и только тогда, когда S сократимо.

Примеры.

1. Если $J = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ – n-элементная цепь, то $T_J(\mathbf{R}^+) = V_n(\mathbf{R}^+)$ – полутело верхних треугольных матриц размерности $n\times n$ с действительными коэффициентами, все диагональные элементы которого положительны [4, 5].

Кольцо $M_n(\mathbf{R}^+)$ всех верхних треугольных матриц n-го порядка с действительными элементами с обычными операциями сложения и умножения матриц является кольцом разностей сократимого полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$.

2. $T_{\mathbf{N}}(\mathbf{R}^+)$ – полутело бесконечных верхних треугольных матриц с действительными коэффициентами.

3. Если J – антицепь, то $T_J(S)$ – полутело обобщенных диагональных матриц, изоморфное степени полутела S:$T_J(S) \cong S^J$.

Рассмотрим основные свойства полутела верхних треугольных матриц.

Теорема 2. $T_J(\mathbf{R}^+) = V_n(\mathbf{R}^+)$ – *ограниченное полутело***.**

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$\mathbf{2} = 2\cdot E_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Покажем, что в главном ядре (**2**) содержится любой элемент из полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$, то есть любая верхняя треугольная матрица вида

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & & a_{ij} & i<j \\ 0 & r_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & r_n \end{pmatrix}$$

при $r_i > 0$. Существует такое натуральное m, что $\frac{1}{2^m} < r_i < 2^m$. Имеем $A^m = \mathbf{2}^m \in (\mathbf{2})$ и $A^{-m} = \mathbf{2}^m \in (\mathbf{2})$. Тогда

$$X - A^{-m} = \begin{pmatrix} r_1 - 2^{-m} & & a_{ij} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & r_n - 2^{-m} \end{pmatrix}$$

и

$$A^m - X = \begin{pmatrix} 2^m - r_1 & & -a_{ij} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 2^m - r_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathsf{R}^+).$$

$$A^{-m} + (X - A^{-m}) = X \text{ и } X + (A^m - X) = A^m.$$

Значит, $A^{-m} \leq X \leq A^m$ и, по свойству порядковой выпуклости ядер [1], любая матрица $X \in V_n(\mathbf{R}^+)$ включена в ядро **(2).** Получили, что $V_n(\mathbf{R}^+) = (\mathbf{2})$ – ограниченное полутело. Теорема доказана.

На полуполе $\mathbf{R}^+$ существует ровно два ядра. Этими ядрами являются $\{1\}$ и само $\mathbf{R}^+$. *Действительно,* рассмотрим произвольное ядро K в $\mathbf{R}^+$, $K \neq \{1\}$. Пусть $a \neq 1$, $a > 1$, $a \in K$. Возьмем $c \in \mathbf{R}^+$. $\exists n \in \mathbf{N}$ такой, что $a^{-n} < c < a^n$, при этом a^{-n}, $a^n \in K$. Тогда по свойству порядковой выпуклости ядер $c \in K$. И поэтому $\mathbf{R}^+ \subseteq K$ и $K = \mathbf{R}^+$.

Значит, полуполе $\mathbf{R}^+$ имеет ровно два ядра: $\{1\}$ и $\mathbf{R}^+$.

Предложение 1. На полутеле верхних треугольных матриц второго порядка $V_2(\mathbf{R}^+)$ существует ровно пять ядер.

Доказательство.

Имеем

$$V_2(\mathsf{R}^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathsf{R}, a, c > 0 \right\}.$$

Его ядрами являются

$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathsf{R}, c > 0 \right\};$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathsf{R}, a > 0 \right\};$$

$$K_3 = K_1 \cap K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathsf{R} \right\}.$$

Пусть K произвольное ядро на полутеле $V_2(\mathbf{R}^+)$. Покажем, что оно совпадает с одним из пяти указанных ядер.

Пусть $K \not\subset K_1 \wedge K \not\subset K_2$. Докажем, что тогда $K = V_2(\mathbf{R}^+)$.

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathsf{R}, c > 0 \right\};$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathsf{R}, a > 0 \right\};$$

$$K \not\subset K_1 \Rightarrow \exists A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$a \neq 1,\ a > 1,\ A \in K;$$

$$K \not\subset K_2 \Rightarrow \exists B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix};$$

$$c' \neq 1,\ c' > 1,\ B \in K.$$

Существует $l \in N\ a^l > 2$.
Существует $m \in N\ (c')^m > 2$.

Тогда

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A^l + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} B^m = \begin{pmatrix} a_0 & b \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \in K,\ a_0 > 1, c_0 > 1.$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Тогда найдется $n \in \mathbf{N}$, для которого $a_0^{-n} < x < a_0^n$ и $c_0^{-n} < z < c_0^n$. Поэтому $C^{-n} < X < C^n \Rightarrow X \in K$, но $C^n - X \in V_2(\mathbf{R}^+)$ и $X - \mathbf{C}^{-n} \in V_2(\mathbf{R}^+)$. Поскольку C^{-n}, $C^n \in K$, то по свойству порядковой выпуклости ядер $X \in K$. Значит, $K = V_2(\mathbf{R}^+)$.

$$K \subseteq K_1.$$

Если

$$\begin{cases} K \neq K_1 \\ K \neq K_0 \end{cases} \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K,$$

где $c \neq 1$ или $c = 1 \wedge b \neq 0$.

Если $K \subseteq K_3$, но $K \neq K_0$ то $K = K_3$.

Покажем, что вместо b могут быть любые действительные числа. Пусть даны матрицы

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} p' & q' \\ 0 & r' \end{pmatrix}.$$

И пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} p'(p'+p)^{-1} & (qr' - q'r)(-p' - p)^{-1}(r' + r)^{-1} \\ 0 & r'(r' + r)^{-1} \end{pmatrix}$$

и

$$\beta = \begin{pmatrix} p(p'+p)^{-1} & (q'r - qr')(-p' - p)^{-1}(r' + r)^{-1} \\ 0 & r(r' + r)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (bp' + b'p)(p' + p)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$$

и

$$(bp' + b'p)(p' + p)^{-1} \in \mathbf{R}.$$

Если $K \subseteq K_3 \wedge b = 0$, то $K = K_0$.

Если $K \neq K_0$, то $K = K_1$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c > 1$, $A \in K$. Покажем, что вместо с будет любое положительное действительное число. То есть $\forall r \in \mathbf{R}^+$, $\alpha + \beta = 1$, то $x < r < y$ и

$$r = \alpha x + \beta y = \alpha x + (1 - \alpha) y = \alpha(x - y) + y.$$

Существует

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} A^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & r \end{pmatrix} \in K = K_1.$$

Значит, возводя A^{-1} и A в степень, мы получим любые матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & r \end{pmatrix}$. То есть

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} A^{-n} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} A^{n} = \begin{pmatrix} 1 & d' \\ 0 & r' \end{pmatrix} \in K.$$

Случай $K \subseteq K_2$ вполне аналогичен случаю $K \subseteq K_1$. К найденным ранее четырем ядрам добавляется еще одно – K_2. Предложение доказано.

Для ограниченного полутела S существует естественная связь между его ядрами K и идеалами I кольца разностей $M_n(\mathbf{R}^+)$:

$$\rho \qquad ab^{-1} \in K, \quad a \in Kb$$

$$K \mapsto I = (K - 1)S, \quad sb - b = (s-1)b$$

$$I \mapsto K = [1]_{\equiv_S} = \{s \in S : s - 1 \in I\} = (I + 1) \cap S$$

$$\rho \equiv_I \text{ на } S$$

Обозначим через A_n множество пар (i, j) по всем натуральным числам $1 \leq i \leq j \leq n$. Множество A_n имеет $(n^2+n)/2$ элементов. Каждому идеалу I кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$ сопоставляется вполне определенное подмножество $\mathrm{A}(I)$ в A_n, задающее общий вид матриц из I: если $(i, j) \in \mathrm{A}(I)$, то элемент a_{ij} матриц из I может принимать любое числовое значение; если же $(i, j) \notin \mathrm{A}(I)$, то $a_{ij} = 0$ для всех матриц из I. Множество $\mathrm{A}(I)$ назовем конфигурацией идеала I. Например, $\mathrm{A}(M_n^{\ +})) = A_n$, конфигурацией нулевого идеала является пустое множество, а одноэлементное множество $\{(1, n)\}$ служит конфигурацией наименьшего ненулевого идеала кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$.

Решетка идеалов кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$ изоморфна решетке конфигураций $A(I)$. Решетка Con $V_n(\mathbf{R}^+)$ изоморфна решетке конфигураций множества A_n.

Предложение 2. $M_n(\mathbf{R}^+)$ – кольцо разностей полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$.

Доказательство. Пусть n – натуральное число и $M_n(\mathbf{R}^+)$ – кольцо всех верхних треугольных матриц n-го порядка с действительными элементами, рассматриваемое с обычными операциями сложения и умножения матриц. Тогда $V_n(\mathbf{R}^+)$ есть множество всех матриц из M_n с положительными элементами на главной диагонали. Кольцо $M_n(\mathbf{R}^+) = V_n(\mathbf{R}^+) - V_n(\mathbf{R}^+)$ является кольцом разностей полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$. Любой элемент из кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$ может быть представлен в виде разности элементов полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$. Элементы кольца разностей – любые действительные числа, которые могут быть получены из элементов полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$, путем вычитания.

При $n = 1$ имеем $M_1(\mathbf{R}^+) = \mathbf{R}$ – это поле действительных чисел, а $V_1(\mathbf{R}^+) = \mathbf{R}^+$– полуполе положительных действительных чисел. При n ³ 2 полутело $V_n(\mathbf{R}^+)$ некоммутативно.

Теорема 3. Для любого натурального числа n все ядра полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$ главные, решетка Con $V_n(\mathbf{R}^+)$ дистрибутивна, имеет единственный атом и число ее элементов равно $(n + 1)$-му числу Каталана.

Доказательство. Нам понадобятся так называемые числа Каталана [1]. Если n – неотрицательное целое число, то n-е число Каталана C_n находится как число сочетаний из $2n$ по n, деленное на $n + 1$:

$$C_n = 2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)/n!.$$

Для доказательства этого утверждения можно рассмотреть и подсчитать идеалы кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$, соответствующие ядрам полутела $V_n(\mathbf{R}^+)$. Для первых значений $n = 1, 2, 3, 4$ утверждение проверено в [5]. Индукцией по порядку n матриц устанавливается, что кольцо $M_n(\mathbf{R}^+)$ имеет ровно C_{n+1} идеалов. Поле $\mathbf{R} = M_1$ имеет $2 = C_2$ идеала. Предполагаем, что утверждение доказано для всех натуральных чисел $m < n$. Далее, опираясь на индуктивное предположение, вид конфигураций и рекуррентную формулу $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0$, подсчитывается общее число идеалов кольца $M_n(\mathbf{R}^+)$ $(n \geq 2)$.

Заметим, что если полутело S имеет только конечное число ядер, то решетка Con S дистрибутивна [1]. На любом полутеле S следующее бинарное отношение: $a \leq b \Leftrightarrow a = b$ или $\exists c \in S\ a + c = b$, – является отношением порядка, превращающим S в упорядоченное полутело.

Предложение 3. В полутеле $T_J(S)$ ядро, порожденное элементом 2, имеет вид

$$(2) = \{(a_{ij}) \in T_J(S) \colon \exists n \in \mathbf{N}\ \forall i \in J\ 2^{-n} \leq a_{ii} \leq 2^n\}.$$

Теорема 4. Полутело $T_J(S)$ является ограниченным тогда и только тогда, когда S ограничено и J конечно.

Теорема 5. Для любого сократимого полутела S центр матричного полутела $T_J(S)$ совпадает с множеством диагональных матриц (a_{ij}) с равными элементами a_{ii}, принадлежащими центру полутела S.

Предложение 4. Полутело $T_J(S)$ является полуполем тогда и только тогда, когда S – полуполе и J – антицепь.

Список литературы

1. Вечтомов Е.М., Черанева А.В. Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14. – № 5. – С. 3–54.

2. Черанева А.В. Кольцо разностей полутела // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. Математика, информатика, язык. – 2007. – № 4. – С. 205–207.

3. Вечтомов Е.М., Петухова Я.В. Полутела обобщенных матриц // Современные проблемы математики и ее приложений: тезисы международной (45-я Всероссийская) молодежной школы-конференции (Екатеринбург, 2–8 февраля 2014 г.)

4. Вечтомов Е.М., Петухова Я.В. Полутела треугольных матриц // Алгебра и логика: теория и применение: тез. докл. междунар. конф. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. – С. 17–18.

5. Кочкина М.А., Петухова Я.В. Конгруэнции полуполей нильмногочленов и полутел треугольных матриц // Международная молодёжная Интеллектуальная Ассамблея: сборник научно-исследовательских работ / отв. ред. М.В. Волкова – Чебоксары: НИИ педагогики и психологии, 2010. – С. 113–116.

References

1. *Vechtomov E.M., Cheraneva A.V.* Polutela i ih svojstva // Fundamental’naja i prikladnaja matematika. 2008. T. 14. no. 5. pp. 3–54.

2. *Cheraneva A.V.* Kol’co raznostej polutela // Vestnik Vjatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta. Matematika, informatika, jazyk, 2007. no. 4. pp. 205–207.

3. *Vechtomov E.M., Petuhova Ja.V.* Polutela obobshhennyh matric // Sovremennye problemy matematiki i ee prilozhenij: tezisy mezhdunarodnoj (45-ja Vserossijskaja) molodezhnoj shkoly-konferencii (Ekaterinburg, 2–8 fevralja 2014 g.)

4. *Vechtomov E.M., Petuhova Ja.V.* Polutela treugol’nyh matric // Algebra i logika: teorija i primenenie: Tez. dokl. mezhdunar. konf. Krasnojarsk: Sibirskij federal’nyj universitet, 2010. pp. 17–18.

5. *Kochkina M.A., Petuhova Ja.V.* Kongrujencii polupolej nil’mnogochlenov i polutel treugol’nyh matric // Mezhdunarodnaja molodjozhnaja Intellektual’naja Assambleja: sbornik nauchno-issledovatel’skih rabot / Otv. red. M.V. Volkova. Cheboksary: NII pedagogiki i psihologii, 2010. pp. 113–116.

Рецензенты:

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров;

Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры и дискретной математики, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров.

Работа поступила в редакцию 07.05.2014.