УДК 512.556

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ КОМПАКТОВ РЕШЕТКОЙ ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ *U*(*X*)

Сидоров В.В.

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», Киров, e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Пусть X – произвольное топологическое пространство и P – множество положительных действительных чисел. Множество всех положительных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полуполе $U(X)$. Подалгеброй A полуполя $U(X)$ называется произвольное его подмножество, такое, что $A \cdot A \subseteq A$, $A + A \subseteq A$ и $P \cdot A \subseteq A$. Обозначим через $A(U(X))$ решетку всех подалгебр полуполя $U(X)$ относительно отношения $\subseteq$. Говорят, что компакт X определяется решеткой $\mathrm{A}(U(X))$, если для любого компакта Y изоморфизм решеток $\mathrm{A}(U(X))$ и $\mathrm{A}(U(Y))$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y. В 1997 году Е.М. Вечтомов доказал определяемость произвольного компакта X решеткой всех подалгебр кольца $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций. В настоящей работе мы продолжили исследование проблемы определяемости произвольного компакта X, но уже решеткой подалгебр полуполя $U(X)$. Основным результатом работы является доказательство определяемости любого конечного компакта X решеткой $\mathrm{A}(U(X))$. Применяется оригинальная техника однопорожденных подалгебр.

Ключевые слова: полуполе, подалгебра, полуполе непрерывных функций, решетка подалгебр

DEFINABILITY OF COMPACTES BY THE LATTICE OF SUBALGEBRAS OF SEMIFIELD *U*(*X*)

Sidorov V.V.

Vyatka State Humanities University, Kirov, e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Let X be a topological space and let P be the set of all positive real numbers. The set of all continuous positive functions on X with pointwise operations of addition and multiplication of functions generates the semifield $U(X)$. Subalgebra A in the semifield $U(X)$ is its an arbitrary subset such that $A \cdot A \subseteq A$, $A + A \subseteq A$ and $P \cdot A \subseteq A$. Denote by $A(U(X))$ the lattice of all subalgebras of the semifield $U(X)$ with respect to the inclusion relation $\subseteq$. It is said that a compact X is defined by the lattice $A(U(X))$ if for any compact Y the fact that lattices $\mathrm{A}(U(X))$ and $\mathrm{A}(U(Y))$ are isomorphic implies the fact that spaces X and Y are homeomorphic. In 1997 E. M. Vechtomov proved the definability of any compact X by the lattice of all subalgebras of the ring $C(X)$ of all continuous real-valued functions. In this work we continue investigation the problem of definability of any compact X, but there compact X is defined by the lattice of subalgebras of the semifield $U(X)$. The main achievement of the paper is the proof of the fact that any compact X is determined by the lattice $A(U(X))$. An original technique of unigenerated subalgebras is applied.

Keywords: semifield, subalgebra, semifield of continuous functions, lattice of subalgebras

Приведем исходные для нас определения и обозначения.

Полукольцом называется алгебра $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, такая, что $\langle S, +, 0\rangle$ – коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ – моноид, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и тождественно $x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$. Полукольцо с делением с ненулевой единицей 1, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. В любом полутеле S сумма ненулевых элементов отлична от 0, поэтому $S\setminus\{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебру, которую также будем называть *полутелом*. *Полуполе* – это коммутативное полутело.

Пусть X – топологическое пространство, P (R^+) – множество положительных (неотрицательных) действительных чисел с обычной топологией, $U(X)$ – полуполе непрерывных функций из X в P с поточечными операциями сложения и умножения. Непустое множество $A \subseteq U(X)$ будем называть *подалгеброй*, если $A \cdot A \subseteq A$, $A + A \subseteq A$ и $P \cdot A \subseteq A$. Простейшими примерами подалгебр служат подалгебра констант P, подалгебра $A_Y = \{f \in U(X){:}\ f|_Y$ – константа$\}$, где $Y \subseteq X$. В частности, $A_X = P$.

Обозначим через $\mathrm{A}(U(X))$ *решетку всех подалгебр полуполя* $U(X)$ с добавленным пустым множеством («пустой» подалгеброй) относительно включения $\subseteq$ (символ $\subset$ в работе означает строгое включение), а через $\mathrm{A}_1(U(X))$ ее *подрешетку*, состоящую из *всех подалгебр с единицей*. Решеточными операциями в $\mathrm{A}(U(X))$ служат $A \wedge B = A \cap B$ и $A \vee B = A + B + AB$, где $AB = \{$конечная сумма $\Sigma f_i g_i{:}\ f_i \in A,\ g_i \in B\}$. Наименьшую подалгебру $A \subseteq U(X)$, содержащую функцию f, назовем *однопорожденной* и обозначим $\langle f\rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f без свободных членов с коэффициентами из R^+. Подалгебру $[f] = \langle f\rangle \vee P$ с единицей также будем называть *однопорожденной*.

В 1997 г. Е.М. Вечтомов [1] доказал, что для произвольных компактов (компактных хаусдорфовых пространств) X и Y изоморфность решеток $\mathrm{A}(U(X))$ и $\mathrm{A}(U(Y))$ подалгебр колец $C(X)$ и $C(Y)$ непрерывных действительнозначных функций равносильна гомеоморфности пространств X и Y. Им же в совместной с В. В. Сидоровым статье [2] была установлена справедливость аналогичного результата для полуколец непрерывных функций.

В связи с развитием теории полуполей непрерывных функций возникла

Гипотеза. *Для произвольных компактов X и Y решетки* $\mathrm{A}(U(X))$ *и* $\mathrm{A}(U(Y))$ *изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны.*

В данной статье мы установим справедливость этой гипотезы в случае конечных компактов, а именно докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть X и Y – произвольные компакты.*

1. *Если решетки* $\mathrm{A}(U(X))$ *и* $\mathrm{A}(U(Y))$ *изоморфны, то пространства X и Y конечны или бесконечны одновременно.*

2. *Для произвольных конечных компактов (дискретных топологических пространств) X и Y изоморфизм решеток* $\mathrm{A}(U(X))$ *и* $\mathrm{A}(U(Y))$ *влечет гомеоморфизм X и Y, то есть пространства X и Y содержат одно и то же число точек.*

Отметим, что справедливость гипотезы для бесконечных компактов пока не установлена.

Приступим к доказательству теоремы. На X пока не накладывается никаких ограничений.

Лемма 1. *Подалгебра A минимальна в $U(X) \Leftrightarrow A = P$.*

Доказательство. Ясно, что подалгебра P – минимальная. Пусть A – произвольная минимальная подалгебра. Выберем $f \in A$ и рассмотрим подалгебру $\langle f^2 \rangle \subseteq A$. Тогда $A = \langle f^2 \rangle$ в силу минимальности A. Следовательно, $f = f^2 g$ для некоторой функции $g \in R^+[f]$. Откуда $fg = 1 \in A$, то есть $P \subseteq A$. В силу минимальности A это означает, что $A = P$. Лемма доказана.

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеризация* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки. Важно, что при изоморфизмах решетки свойства, имеющие в ней решеточную характеризацию, сохраняются. Например, лемма 1 позволяет утверждать, что в $\mathrm{A}(U(X))$ имеется решеточная характеризация подалгебры констант P.

Непосредственным следствием правила знаков Декарта (см. [4, с. 249]) является

Лемма 2. *Для произвольной функции $f \in U(X)$, $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3$, и показателя $k \in N$ (при $k = 1$ достаточно $|\mathrm{Im}\, f| \geq 2$) имеем: $f^k = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n \Leftrightarrow a_k = 1$ и $a_i = 0$ при $i \neq k$.*

Выясним, когда равны однопорожденные подалгебры.

Лемма 3. *Для произвольных функций f, $g \in U(X)$, $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3$, $|\mathrm{Im}\, g| \geq 3$, имеем:*

$\langle f \rangle = \langle g \rangle \Leftrightarrow [f] = [g] \Leftrightarrow f$ *и g пропорциональны.*

Доказательство. Очевидно, пропорциональность функций f и g из $U(X)$ влечет равенства $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ и $[f] = [g]$ соответствующих им однопорожденных подалгебр.

Пусть $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3$, $|\mathrm{Im}\, g| \geq 3$ и $[f] = [g]$. Равенство подалгебр означает, что $f = q(g)$ и $g = p(f)$ для некоторых многочленов $q \in R^+[g]$ и $p \in R^+[f]$. Поэтому $f = q(p(f))$. Если многочлены q и p не мономы первой степени, то многочлен $q(p(f))$ также не моном первой степени. Поэтому по лемме 2 равенство $f = q(p(f))$ противоречит $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3$. Значит, q и p – мономы первой степени, что и означает пропорциональность функций f и g.

Пропорциональность функций f и g в случае, когда $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, доказывается аналогично.

Замечание 1. Несложно показать, что для пропорциональных функций f, $g \in U(X)$, $|\mathrm{Im}\, f| \geq 2$, $|\mathrm{Im}\, g| \geq 2$, равенство $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ равносильно пропорциональности функций f и g.

Замечание 2. Пусть $\mathrm{Im}\, f = \{r_1, \ldots, r_n\}$, где $r_1 > \ldots > r_n > 0$. Тогда открыто-замкнутые множества $X_i = f^{-1}(r_i)$ образуют разбиение X, и любая функция $g \in [f] \backslash P$ является константой на каждом X_i, причем если $g(X_i) = \{t_i\}$, то $t_1 > \ldots > t_n > 0$. Используем это наблюдение следующим образом: функции, отличные от констант и задающие подалгебры из $[f]$, иногда будем записывать n-ками своих значений, упорядоченными так же, как значения функции f, причем нормированными, то есть наибольшие значения, которые функции принимают на X_1, считать равными единице. Например, если $f = 2$ на X_1 и $f = 1$ на $X \backslash X_1$, то $[f] = [(1, 1/2)]$, $[f + 1] = [(1, 2/3)]$.

Обозначим через A_f подрешетку решетки $\mathrm{A}_1(U(X))$, образованную всеми подалгебрами с единицей, включенными в $[f]$.

Предложение 1. *Для произвольной функции $f \in U(X)$ верны следующие утверждения:*

1) $f \in P \Leftrightarrow \mathrm{A}_f = \{P\}$;

2) $\mathrm{Im}\, f = \{r_1, r_2\}$, $r_1 > r_2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}_f$ – *двухэлементная цепь* $P \subset [f]$;

3) $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3 \Leftrightarrow \mathrm{A}_f$ – *бесконечная решетка.*

Доказательство. Утверждение (1), очевидно, верно. Пусть $\mathrm{Im}\, f = \{r_1, r_2\}$, $r_1 > r_2 > 0$. Докажем, что $[g] = [f]$ для произвольной функции $g \in [f] \backslash P$. Для этого достаточно установить включение $[f] \subseteq [g]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g = (1, a)$ и $f = (1, b)$, где $1 > a > 0$, $1 > b > 0$. Если $a = b$, то $[f] = [g]$. Пусть $a > b$. Выберем $n \in N$ так, чтобы $a^n \leq b$. Тогда

$$(a - a^n)f = (b - a^n)g + (a - b)g^n.$$

Откуда $[f] \subseteq [g]$.

Случай $a < b$ сводится к предыдущему. Для этого выберем число $r > 0$ так, чтобы у нормированной функции $(g + r)/(1 + r) = (1,\ c)$ значение c было больше b (с ростом r число c стремится к 1). Тогда, как было установлено ранее, $[f] \subseteq [g + r]$. Следовательно, $[f] \subseteq [g]$, так как $[g] \subseteq [g + r]$.

Получается, что все подалгебры из $[f]$, отличные от P, совпадают с $[f]$. Значит, A_f – двухэлементная цепь $P \subset [f]$.

Наконец, если $|\mathrm{Im}\, f| \geq 3$, то по лемме 3 включение $[f^n] \subseteq [f^{2n}]$ строгое для всех $n \in N$, а потому число элементов решетки A_f бесконечно. Предложение доказано.

Элемент A решетки называется $\vee$-*неразложимым*, если из того, что $A = B \vee C$ для некоторых элементов B и C этой решетки, следует $A = B$ или $A = C$.

Следствие 1. *Если решетка* A_f *конечна, то все ее элементы являются однопорожденными* $\vee$*-неразложимыми подалгебрами.*

Предложение 2. *Однопорожденные подалгебры решеток* $\mathrm{A}(U(X))$ *и* $\mathrm{A}_1(U(X))$ *– это в точности* $\vee$*-неразложимые компактные их элементы.*

Доказательство. Компактность однопорожденных подалгебр очевидна. Докажем их $\vee$-неразложимость. Предположим, напротив, имеется однопорожденная подалгебра $[f]$, которая $\vee$-неразложима, то есть $[f] = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset [f]$. Функция f как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид $f = p_1(f)q_1(f) + \ldots + p_m(f)q_m(f) = p(f)$, где $p_i \in A \subseteq R^+[f]$, $q_i \in B \subseteq R^+[f]$ – многочлены, отличные от мономов первой степени, так как иначе $A = [f]$ или $B = [f]$. Поэтому $\deg p \geq 2$. Таким образом, по лемме 3 равенство $f = p(f)$ влечет $|\mathrm{Im}\, f| \leq 2$. Согласно предложению 1 это означает конечность решетки A_f, что невозможно ввиду следствия 1 и нашего предположения о $\vee$-неразложимости подалгебры $[f]$.

$\vee$-неразложимость подалгебры $\langle f \rangle$ доказывается аналогично.

Для завершения доказательства осталось заметить, что в решетках $\mathrm{A}(U(X))$ и $\mathrm{A}_1(U(X))$ компактность подалгебры равносильна ее конечнопорожденности, и если любая система образующих конечнопорожденной подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$-разложима. Предложение доказано.

Следующая лемма является аналогом теоремы Стоуна – Вейерштрасса для полуполей непрерывных положительных функций.

Лемма 4. *Пусть* X *– компакт и* A *– подалгебра* $U(X)$, *для которой выполняются следующие условия:*

1) $1 \in A$;

2) $1 - f \in A$ *для любой* $f \in A$, $f < 1$;

3) *для любой пары точек* $x \neq y \in X$ *найдется функция* $f \in A$, *что* $f(x) \neq f(y)$.

Тогда подалгебра A *всюду плотна в* $U(X)$ *относительно супремум-нормы.*

Доказательство. Следует из центральной теоремы работы [3].

Предложение 3. *Пусть* X *– компакт и подалгебра* A *– максимальная среди собственных подалгебр* $U(X)$, *для которых выполняются следующие условия:*

1) $P \subseteq A$;

2) *для любых подалгебр* $\langle f \rangle \subseteq A$ и $\langle g \rangle \subseteq U(X)$ из $\langle f \rangle \subset (\langle f \rangle \vee \langle g \rangle) \cap A$ следует $\langle g \rangle \subseteq A$.

Тогда A *всюду плотна в* $U(X)$ (*относительно супремум-нормы*) *или* $A = A_{\{x,\, y\}}$ *для некоторых* $x, y \in X$.

Доказательство. Пусть для подалгебры A выполняются условия (1) и (2). Докажем, что тогда выполняются условия (1) и (2) леммы 4.

Справедливость (1) очевидна. Установим (2). Если $f \in A$ – константа и $f < 1$, то $1 - f \in P \subseteq A$. Допустим, $f \notin P$. Тогда $\langle f \rangle \subset (\langle f \rangle \vee \langle 1 - f \rangle) \cap A$, так как $1 = f + (1 - f) \in (\langle f \rangle \vee \langle 1 - f \rangle) \cap A$. Следовательно, $1 - f \in A$ по условию (2).

Таким образом, если для подалгебры A выполняются условия (1) и (2) и условие (3) леммы 4, то она всюду плотна в $U(X)$ по лемме 4. Если же условие (3) леммы 4 не выполняется, то $A \subseteq A_{\{x,\, y\}}$ для некоторой пары точек $x, y \in X$. В силу максимальности подалгебры A среди подалгебр со свойствами (1) и (2) для завершения доказательства остается показать, что условия (1) и (2) выполняются для подалгебры $A_{\{x,\, y\}}$.

Первое, очевидно, верно. Пусть подалгебры $\langle f \rangle \subseteq A_{\{x,\, y\}}$ и $\langle g \rangle \subseteq U(X)$ таковы, что $\langle f \rangle \subset (\langle f \rangle \vee \langle g \rangle) \cap A_{\{x,\, y\}}$. Если, скажем, $g(x) > g(y)$, то $h(x) > h(y)$ для любой функции h из $(\langle f \rangle \vee \langle g \rangle) \setminus \langle f \rangle$. Поэтому $\langle f \rangle = (\langle f \rangle \vee \langle g \rangle) \cap A_{\{x,\, y\}}$. Противоречие. Значит, $g \in A_{\{x,\, y\}}$.

Лемма 5. *В полуполе* $U(X)$, *где* X *конечно, всюду плотные подалгебры совпадают с* $U(X)$.

Доказательство. Пусть подалгебра A всюду плотна в $U(X)$. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется функция $e_x \in A$, принимающая в точке x значение 1, а в остальных точках строго меньшие значения. Остается воспользоваться леммой из статьи [5].

Доказательство основной теоремы теперь получается из предложения 3 и леммы 5. Достаточно заметить, что число подалгебр вида $A_{\{x,\, y\}}$ в полуполе $U(X)$ конечно тогда и только тогда, когда само X конечно, и равно $n(n - 1)/2$, если $|X| = n$.

Список литературы

1. Вечтомов Е.М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. – 1997. – Т. 62, № 5. – С. 687-693.

2. Вечтомов Е.М., Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 63–103.

3. Каплан А.А. Замечание к теореме Стоуна-Вейерштрасса // Сибирский математический журнал. – 1975. – Т. 16, № 5. – С. 113–115.

4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. – М.: Физматлит., 2000. – 272 с.

5. Семенов А.Н. О подалгебрах полуколец непрерывных функций // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. – 1998. – № 1. – С. 83–90.

References

1. Vechtomov E.M. Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces. Mathematical Notes, 1997, Vol. 62, no. 5, pp. 687–693.

2. Vechtomov E.M., Sidorov V.V. Isomorphisms of lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions. Fundamental and Applied Mathematics, 2010, Vol. 16, no. 3, pp. 63–103.

3. Kaplan A.A. A remark on the Stone-Weierstrass theorem. Siberian Mathematical Journal, 1975, Vol. 16, no. 5, pp. 113–115.

4. Kostrikin A.I. Introduction to Algebra. Part I. Fundamentals of Algebra. Moskva: FIZMATLIT, 2000, 272 p.

5. Semenov A.N. About subalgebras of semirings of continuous functions. Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities Volga-Vyatka Region, 1998, no. 1, pp. 83–90.

Рецензенты:

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров;

Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры и дискретной математики, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров.

Работа поступила в редакцию 30.04.2014.