УДК 330.42:519.612.4

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМООРГАНИЗАЦИИ РЫНКА ТРУДА

Семенчин Е.А., Невечеря А.П.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар, e-mail: artiom1989@mail.ru

В рамках межотраслевой математической модели самоорганизации рынка труда изучена обратная задача: по заданному числу работников в каждой из n отраслей экономики и числу безработных в этих отраслях определить вероятности увольнения работников из этих отраслей и вероятности того, что безработный из одной отрасли найдёт работу в какой-либо другой. Предложена методика решения этой задачи, основанная на интерполировании исходных данных с целью перехода от недоопределённой системы к полностью определённой и с последующим применением регуляризации методом Тихонова с целью подавления погрешностей интерполирования. Рассмотрен пример реализации данной методики на практике: проведён анализ отраслей экономики Российской Федерации в 2010–2011 годы. С высокой точностью были получены оценки указанных выше вероятностей. На основе полученных результатов сделаны выводы о потоках рабочей силы данных отраслей, а также о стабильности состояния рынка труда в рассматриваемые годы.

Ключевые слова: рынок труда, недоопределённая система, интерполирование, регуляризация Тихонова

THE INVERSE PROBLEM IN THE MATHEMATICAL MODEL OF SELF-ORGANIZATION OF THE LABOR MARKET

Semenchin E.A., Nevecherya A.P.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: artiom1989@mail.ru

There are few common mathematical models describing the labor market. This article is dedicated to one of these models – mathematical model of self-organization in the labor market. It enables set the ratio among the number of workers employed in various branches, the number of potential workers in these branches and the rate of change of these indicators. In this paper is studied the inverse problem of the mathematical model of self-organization in the labor market. For a given number of workers in each of the n branches of economy and the number of unemployed in these branches has been determined the probability of dismissal of workers from these sectors and the probability that the unemployed from one branch find a job in other branch. The authors proposed a method of solving this problem. First, the initial data are interpolated to move from underdetermined system to a fully defined system. Then applied the Tikhonov regularization in order to reduce errors of interpolation. The implementation of this method is shown by the example of branches of the Russian economy in 2010–2011. Estimates of the above probabilities are obtained with high accuracy. Based on these results, the authors concluded about the flows of labor in these branches and about the stability of the labor market in the years under consideration.

Keywords: the labor market, underdetermined system, interpolation, Tikhonov regularization

В настоящее время значительное число исследований в экономике посвящено рынку труда. Однако достаточно общих математических моделей, описывающих этот рынок, существует немного. Одной из таких математических моделей является математическая модель самоорганизации рынка труда [1–4]. Она позволяет установить балансовые соотношения между числом работников, занятых в различных отраслях, числом потенциальных работников в этих отраслях и скоростями их изменения. В данной работе рассмотрены некоторые задачи, возникающие в рамках этой модели.

Математическая модель самоорганизации рынка труда имеет вид [1–4]:

$$\begin{gathered}
\frac{dN_1^{(j)}(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_1^{(i)}(t)P_2^{(i)}(t) - N_1^{(j)}(t)P_2^{(j)}(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_2^{(i)}(t)P_1^{(i,j)}(t) - N_2^{(j)}(t)P_1^{(j,j)}(t);\\
\frac{dN_2^{(j)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t)P_2^{(i)}(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_2^{(i)}(t)P_1^{(i,j)}(t) - N_2^{(j)}(t)\sum_{i=1}^{n} P_1^{(j,i)}(t);\\
N_1^{(j)}(0) = N_{10}^{(j)};\\
N_2^{(j)}(0) = N_{20}^{(j)};\\
t\in[0,\ \infty),\ j = 1,2,..,n;
\end{gathered} \tag{1}$$

$$P_2^{(i)} \geq 0;\quad P_2^{(i)} \leq 1;\quad i = 1, 2, ..., n;\quad P_1^{(j,k)} \geq 0;\ \ j, k = 1, 2, ..., n; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_1^{(j,k)} \le 1;\quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (3)$$

Здесь $N_1^{(i)}(t)$ – общее число работников, занятых в i-й отрасли в момент времени t; $N_2^{(i)}(t)$ – число потенциальных работников, которые могут быть привлечены для работы в i-ю отрасль и которые в момент времени t являются безработными; $N_{10}^{(j)}$, $N_{20}^{(j)}$ – заданные числа; $P_1^{(i,j)}(t)$ – вероятность того, что безработный i-й отрасли в момент времени t может найти работу в j-й отрасли; $P_2^{(i)}(t)$ – вероятность увольнения работника i-й отрасли в момент времени t.

Соотношения (1) позволяют сформулировать две задачи.

Задача 1. По заданным $P_2^{(i)}(t)$, $P_1^{(i,j)}(t)$, $N_{10}^{(j)}$, $N_{20}^{(j)}$, $i, j = \overline{1,n}$, определить $N_1^{(j)}(t)$, $N_2^{(j)}(t)$.

Задача 1 представляет собой задачу построения решения линейной системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (задачу Коши). Эту задачу будем называть прямой задачей в рамках математической модели (1).

Задача 2. По заданным $N_1^{(j)}(t)$, $N_2^{(j)}(t)$, $N_{10}^{(j)}$, $N_{20}^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., n$, для всех $t \in [0, \infty)$ определить $P_2^{(i)}(t)$, $P_1^{(i,j)}(t)$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Задачу 2 будем называть обратной задачей (по отношению к задаче 1) в рамках модели (1).

В прикладных исследованиях, как правило, $N_1^{(j)}(t)$, $N_2^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, ..., n$, известны (заданы). Поэтому значительный интерес представляет анализ задачи 2. Её решение позволяет определить в момент t доли (вероятности) $P_2^{(j)}(t)$, $P_1^{(i,j)}(t)$ работников соответственно:

а) уволенных из отрасли j;

б) перешедших из i-й отрасли в j-ю.

Цель данной работы – исследовать задачу 2 при $t = 0, 1, 2, ...$ Время t выбирается дискретным в силу того, что измерения значений $N_1^{(j)}(t)$ и $N_2^{(j)}(t)$ возможны, как правило, только в такие моменты.

Конечно-разностный аналог задач (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} N_1^{(j)}(t+1) &= N_1^{(j)}(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} N_1^{(i)}(t) P_2^{(i)}(t) - N_1^{(j)}(t) P_2^{(j)}(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} N_2^{(i)}(t) P_1^{(i,j)}(t) - N_2^{(j)}(t) P_1^{(j,j)}(t);\\ N_2^{(j)}(t+1) &= N_2^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t) P_2^{(i)}(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} N_2^{(i)}(t) P_1^{(i,j)}(t) - N_2^{(j)}(t) \sum_{i=1}^{n} P_1^{(j,i)}(t);\ \ j = 1,2,..,n. \end{aligned} \qquad (4)$$

Систему (4) можно переписать в векторно-матричном виде:

$$N(t+1) = P(t) \cdot N(t); \qquad (5)$$

$$N(t) = \left(N_1^{(1)}(t),\ N_1^{(2)}(t),\ ...\ N_1^{(n)}(t),\ N_2^{(1)}(t),\ N_2^{(2)}(t),\ ...\ N_2^{(n)}(t)\right)^T;\quad t = 0, 1, 2, ... \qquad (6)$$

T – операция транспонирования,

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1-P_2^{(1)}(t) & P_2^{(2)}(t) & ... & P_2^{(n)}(t) & -P_1^{(1,1)}(t) & P_1^{(2,1)}(t) & ... & P_1^{(n,1)}(t)\\ P_2^{(1)}(t) & 1-P_2^{(2)}(t) & ... & P_2^{(n)}(t) & P_1^{(1,2)}(t) & -P_1^{(2,2)}(t) & ... & P_1^{(n,2)}(t)\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ P_2^{(1)}(t) & P_2^{(2)}(t) & ... & 1-P_2^{(n)}(t) & P_1^{(1,n)}(t) & P_1^{(2,n)}(t) & ... & -P_1^{(n,n)}(t)\\ P_2^{(1)}(t) & P_2^{(2)}(t) & ... & P_2^{(n)}(t) & 1-\sum_{i=1}^{n} P_1^{(1,i)}(t) & P_1^{(2,1)}(t) & ... & P_1^{(n,1)}(t)\\ P_2^{(1)}(t) & P_2^{(2)}(t) & ... & P_2^{(n)}(t) & P_1^{(1,2)}(t) & 1-\sum_{i=1}^{n} P_1^{(2,i)}(t) & ... & P_1^{(n,2)}(t)\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ P_2^{(1)}(t) & P_2^{(2)}(t) & ... & P_2^{(n)}(t) & P_1^{(1,n)}(t) & P_1^{(2,n)}(t) & ... & 1-\sum_{i=1}^{n} P_1^{(n,i)}(t) \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Очевидно, система (4) (или, что то же самое, (5)) содержит $n^2 + n$ неизвестных $P_2^{(j)}(t)$, $P_1^{(i,j)}(t)$, где n – количество отраслей в исследуемой модели, и $2n$ уравнений, $n \geq 2$. Так как при $n \geq 2$, $n^2 + n > 2n$, то она всегда является недоопределённой. Доопределим её.

Рассмотрим два случая: n – нечётно, n – чётно.

Пусть n – нечётно. Предположим, что на интервале $[t, t + 1]$ элементы матрицы (7) постоянны, и на этом интервале вместо (4) (т.е. (5)) рассмотрим расширенную систему:

$$\begin{cases} N_1^{(j)}\left(t+\frac{n+1}{2n}+mh\right) = N_1^{(j)}(t+mh) + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_1^{(i)}(t+mh)P_2^{(i)} + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_2^{(i)}(t+mh)P_1^{(i,j)} - \\ \qquad -N_2^{(j)}(t+mh)P_1^{(j,j)}; \\ N_2^{(j)}\left(t+\frac{n+1}{2n}+mh\right) = N_2^{(j)}(t+mh) + \sum\limits_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t+mh)P_2^{(i)} + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_2^{(i)}(t+mh)P_1^{(i,j)} - \\ \qquad -N_2^{(j)}(t+mh)\sum\limits_{i=1}^{n} P_1^{(j,i)}; \end{cases} \tag{8}$$

$$j = 1, 2, ..., n;\ h = \frac{1}{n};\ m = 0,1,...,\frac{n-1}{2}$$

(так как по предположению n – нечётно, $n \geq 2$, то $\frac{n-1}{2}$ – натуральное).

Значения элементов $N_1^{(j)}(t+mh)$, $N_2^{(j)}(t+mh)$, $m = 0,1,...,\frac{n-1}{2}$, при каждом $j = 1, 2, ..., n$ в правой части (8) находим по значениям $N_1^j(t)$, $N_1^j(t+1)$ и $N_2^j(t)$, $N_2^j(t+1)$, используя формулы интерполирования

$$N_1^{(j)}(t+mh) = N_1^{(j)}(t) + mh\cdot\left(N_1^{(j)}(t+1) - N_1^{(j)}(t)\right);$$

$$N_2^{(j)}(t+mh) = N_2^{(j)}(t) + mh\cdot\left(N_2^{(j)}(t+1) - N_2^{(j)}(t)\right); \tag{9}$$

$$j = 1, 2, ..., n;\ h = \frac{1}{n};\quad m = 0,1,...,\frac{n-1}{2};$$

значения элементов $N_1^{(j)}\left(t+\frac{n+1}{2n}+mh\right)$, $N_2^{(j)}\left(t+\frac{n+1}{2n}+mh\right)$, $j = 1, 2, ..., n$, в левой части (8) находим, используя формулы

$$N_1^{(j)}\left(t+\left(m+\frac{n+1}{2}\right)h\right) = N_1^{(j)}(t) + \left(m+\frac{n+1}{2}\right)h\cdot\left(N_1^{(j)}(t+1) - N_1^{(j)}(t)\right);$$

$$N_2^{(j)}\left(t+\left(m+\frac{n+1}{2}\right)h\right) = N_2^{(j)}(t) + \left(m+\frac{n+1}{2}\right)h\cdot\left(N_2^{(j)}(t+1) - N_2^{(j)}(t)\right); \tag{10}$$

$$j = 1, 2, ..., n;\ h = \frac{1}{n};\ m = 0,1,...,\frac{n-1}{2}.$$

Легко убедиться, что система (8) является полностью определённой: содержит $n^2 + n$ уравнений и неизвестных. Её можно представить в векторно-матричном виде

$$\tilde{N}\left(t+\frac{n+1}{2n}\right) = P(t)\cdot\tilde{N}(t), \tag{11}$$

где

$$\tilde{N}(t)=\begin{pmatrix} N_1^{(1)}(t) & N_1^{(1)}(t+h) & \ldots & N_1^{(1)}(t+\frac{n-1}{2}h) \\ N_1^{(2)}(t) & N_1^{(2)}(t+h) & \ldots & N_1^{(2)}(t+\frac{n-1}{2}h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_1^{(n)}(t) & N_1^{(n)}(t+h) & \ldots & N_1^{(n)}(t+\frac{n-1}{2}h) \\ N_2^{(1)}(t) & N_2^{(1)}(t+h) & \ldots & N_2^{(1)}(t+\frac{n-1}{2}h) \\ N_2^{(2)}(t) & N_2^{(2)}(t+h) & \ldots & N_2^{(2)}(t+\frac{n-1}{2}h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_2^{(n)}(t) & N_2^{(n)}(t+h) & \ldots & N_2^{(n)}(t+\frac{n-1}{2}h) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Поскольку значения $N_i^j\left(t+mh\right)$, $N_i^j\left(t+\frac{n+1}{2n}+mh\right)$, $m=0,1,...,\frac{n-1}{2}$, j = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, найдены интерполированием, то они, очевидно, содержат ошибки интерполяции. Поэтому (8) целесообразно решать методом регуляризации Тихонова [5]:

$$\left\|\tilde{N}\left(t+\frac{n+1}{2}h\right)-P\cdot\tilde{N}\left(t\right)\right\|+\alpha\left\|P\right\|\to\min_{\alpha}\min_{P};\ \alpha=\text{const}>0, \qquad (13)$$

где α > 0 – коэффициент невязки, компоненты матрицы P (см. (7)) удовлетворяют условиям (2), (3).

Пусть n – чётно. Тогда $\frac{n-1}{2}$ (см. (8)) не является натуральным. В этом случае задачу 2 решаем в два этапа:

1. Выбираем одну из данных n отраслей, например, r-ю, r = 1, 2, ..., n, и разбиваем её на две непересекающиеся (то есть не содержащие общих элементов – работников) фиктивные подотрасли r' и r' + 1 таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$N_i^{(r)}\left(t\right)=N_i^{(r')}\left(t\right)+N_i^{(r'+1)}\left(t\right);$$

$$N_i^{(r)}\left(t+1\right)=N_i^{(r')}\left(t+1\right)+N_i^{(r'+1)}\left(t+1\right);$$

$$i=1,2. \qquad (14)$$

Получаем n + 1 отрасль, n + 1 – нечетно. Находим оценки вероятностей $P_2^{(i)}$, $P_1^{(i,j)}$, i, j = 1, 2, ..., n + 1, по описанной выше схеме.

2. Объединяем отрасли r', r' + 1 в одну r-ю, воспользовавшись соотношениями (которые можно легко получить с помощью формулы полной вероятности и свойств условных вероятностей):

$$P_2^{(r)}=P_2^{(r')}\frac{N_1^{(r')}\left(t\right)}{N_1^{(r)}\left(t\right)}+P_2^{(r'+1)}\frac{N_1^{(r'+1)}\left(t\right)}{N_1^{(r)}\left(t\right)};$$

$$P_1^{(r,j)}=P_1^{(r',j)}\frac{N_2^{(r')}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)}+P_1^{(r'+1,j)}\frac{N_2^{(r'+1)}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)};\ j=1,2,...,n+1,\ j\neq r',\ r'+1,$$

$$P_1^{(i,r)}=P_1^{(i,r')}+P_1^{(i,r'+1)};\ i=1,2,...,n+1,\ i\neq r',\ r'+1; \qquad (15)$$

$$P_1^{(r,r)}=P_1^{(r',r)}\frac{N_2^{(r')}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)}+P_1^{(r'+1,r)}\frac{N_2^{(r'+1)}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)}=$$

$$=\left(P_1^{(r',r')}+P_1^{(r',r'+1)}\right)\frac{N_2^{(r')}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)}+\left(P_1^{(r'+1,r')}+P_1^{(r'+1,r'+1)}\right)\frac{N_2^{(r'+1)}\left(t\right)}{N_2^{(r)}\left(t\right)}.$$

Рассмотрим следующий пример. Согласно данным Федеральной службы государственной статистики (http://www.gks.ru) отраслевая экономика России разбивается на 12 отраслей: отрасль № 1 – «Сельское и лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство», № 2 – «Добыча полезных ископаемых», № 3 – «Обрабатывающие производства», № 4 – «Производство и распределение электроэнергии, газа и воды», № 5 – «Строительство», № 6 – «Оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, гостиницы и рестораны», № 7 – «Транспорт и связь», № 8 – «Финансовая деятельность, операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг», № 9 – «Государственное управление и обеспечение военной безопасности, социальное обеспечение», № 10 – «Образование», № 11 – «Здравоохранение и предоставление социальных услуг», № 12 – «Другие виды экономической деятельности». Распределение населения по отраслям, занятого в производственном процессе в 2010–2011 гг., приведено в табл. 1 [6].

Таблица 1

t	$N_1^{(1)}(t)$	$N_1^{(2)}(t)$	$N_1^{(3)}(t)$	$N_1^{(4)}(t)$	$N_1^{(5)}(t)$	$N_1^{(6)}(t)$	$N_1^{(7)}(t)$	$N_1^{(8)}(t)$	$N_1^{(9)}(t)$	$N_1^{(10)}(t)$	$N_1^{(11)}(t)$	$N_1^{(12)}(t)$
2010	5384,896	1398,674	10629,924	2307,812	5035,227	12238,399	6503,835	5874,431	5664,630	6573,769	5524,763	2727,415
2011	5455,959	1417,132	10628,492	2267,412	5101,676	12754,190	6660,522	6164,525	5455,959	6518,808	5597,672	2834,265

Число безработных, которые могут быть привлечены для работы в каждую из указанных отраслей, оценено с помощью данных об общем числе безработных, данных о потребности организаций в работниках по видам экономической деятельности [6] и представлено в табл. 2.

Таблица 2

t	$N_2^{(1)}(t)$	$N_2^{(2)}(t)$	$N_2^{(3)}(t)$	$N_2^{(4)}(t)$	$N_2^{(5)}(t)$	$N_2^{(6)}(t)$	$N_2^{(7)}(t)$	$N_2^{(8)}(t)$	$N_2^{(9)}(t)$	$N_2^{(10)}(t)$	$N_2^{(11)}(t)$	$N_2^{(12)}(t)$
2010	230,083	88,707	731,830	256,695	149,138	424,683	625,382	663,637	171,869	493,431	1474,748	233,964
2011	192,466	78,266	664,032	239,229	136,843	368,196	573,952	552,293	142,750	439,078	1325,602	209,694

Так как число отраслей – чётное ($n = 12$), разобьём одну из двенадцати отраслей на две фиктивные отрасли. В качестве такой отрасли выберем «Другие виды экономической деятельности» (табл. 3).

Таблица 3

t	$N_1^{(r'=12)}(t)$	$N_1^{(r'+1=13)}(t)$	$N_2^{(r'=12)}(t)$	$N_2^{(r'+1=13)}(t)$
2010	681,854	2045,561	58,491	175,473
2011	708,566	2125,698	52,424	157,271

Используя (9), (10), вычислим $N_i^j(t+mh)$, $N_i^j\left(t+\frac{7}{13}+mh\right)$, $m = 0, 1, 2, ..., 6$, $j = 1, 2, ..., 13$, $i = 1,2$, $h = \frac{1}{13}$ и построим систему (8). Решение (8) находим методом регуляризации, используя соотношения (13), (2), (3) и средство «Поиск решений» программного продукта Microsoft Excel.

В результате проведённых расчётов находим вероятности $P_1^{(i,j)}$ (табл. 4) и вероятности $P_2^{(i)}$ (табл. 5). При этом α = 0,0001, норма выражения (13) равна 37,142 (что указывает на высокую точность полученных результатов – относительная погрешность не превосходит 0,00062).

Таблица 4

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12’	13’
1	0,1270	0,0000	0,0510	0,0217	0,0093	0,0000	0,0000	0,0819	0,0004	0,0405	0,0594	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,3775	0,0110	0,0018	0,0000	0,0730	0,0807	0,0000	0,0000	0,0000	0,0139	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,2623	0,0036	0,0037	0,0150	0,0096	0,0000	0,0000	0,0000	0,0182	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,3923	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0331	0,0159	0,1471	0,1016	0,1028	0,0000	0,0000	0,0000	0,0364	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,1091	0,0589	0,0181	0,0928	0,0955	0,2918	0,0000	0,0315	0,1433	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0027	0,0000	0,0000	0,1787	0,0497	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0000	0,0000
8	0,0377	0,0003	0,0615	0,0031	0,0035	0,0436	0,0000	0,0441	0,0050	0,0914	0,0926	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4074	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3161	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0198	0,0000	0,0000	0,0632	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1133	0,0000	0,0000
12’	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7144	0,0000
13’	0,0000	0,0000	0,0778	0,0304	0,0037	0,0770	0,0254	0,0214	0,0000	0,0000	0,0499	0,0000	0,0000

Таблица 5

$P_2^{(1)}$	$P_2^{(2)}$	$P_2^{(3)}$	$P_2^{(4)}$	$P_2^{(5)}$	$P_2^{(6)}$	$P_2^{(7)}$	$P_2^{(8)}$	$P_2^{(9)}$	$P_2^{(10)}$	$P_2^{(11)}$	$P_2^{\prime(12)}$	$P_2^{\prime(13)}$
0	0	0	0,00002887	0	0	0	0	0,00752771	0	0	0,000002	0,000001

Используя данные табл. 4, 5, по формулам (15) находим вероятности $P_1^{(12,j)}$, $P_1^{(i,12)}$, $j=\overline{1,11}$, $i=\overline{1,11}$ (см. табл. 6), и вероятности

$$P_2^{(12)} = P_2^{\prime(12)} \frac{N_1^{\prime(12)}(t)}{N_1^{(12)}(t)} + P_2^{\prime(13)} \frac{N_1^{\prime(13)}(t)}{N_1^{(12)}(t)} = 0{,}00000125;$$

$$P_1^{(12,12)} = (P_1^{\prime(12,12)} + P_1^{\prime(12,13)}) \frac{N_2^{\prime(12)}(t)}{N_2^{(12)}(t)} + (P_1^{\prime(13,12)} + P_1^{\prime(13,13)}) \frac{N_2^{\prime(13)}(t)}{N_2^{(12)}(t)} = 0{,}178589.$$

Таблица 6

$P_1^{(1,12)}$	0	$P_1^{(12,1)}$	0,000001
$P_1^{(2,12)}$	0	$P_1^{(12,2)}$	0
$P_1^{(3,12)}$	0	$P_1^{(12,3)}$	0,058372
$P_1^{(4,12)}$	0	$P_1^{(12,4)}$	0,022792
$P_1^{(5,12)}$	0	$P_1^{(12,5)}$	0,002749
$P_1^{(6,12)}$	0	$P_1^{(12,6)}$	0,057779
$P_1^{(7,12)}$	0,000021	$P_1^{(12,7)}$	0,019053
$P_1^{(8,12)}$	0	$P_1^{(12,8)}$	0,016035
$P_1^{(9,12)}$	0	$P_1^{(12,9)}$	0
$P_1^{(10,12)}$	0	$P_1^{(12,10)}$	0
$P_1^{(11,12)}$	0	$P_1^{(12,11)}$	0,037453

Следовательно (см. табл. 5, 6), с 2011 по 2012 год вероятность увольнения из отраслей № 1, № 2, № 3, № 5, № 6, № 7, № 8, № 10, № 11 равна 0, что фактически означает отсутствие уволенных работников из данных отраслей. Значения вероятностей увольнения из других отраслей за данный промежуток времени достаточно малы – не превышают 0,01 (т.е. 1 %).

Вероятности $P_1^{(i,j)}$ – того, что безработный, уволенный из i-й отрасли, найдёт работу в j-й отрасли, максимальны в случае $i = j$ (см. табл. 4). Это означает, что безработный, уволенный с работы в одной из отраслей в течение 2010–2011 гг. снова, как правило, был принят на работу в этой же отрасли.

Малые значения вероятностей увольнения работников из каждой отрасли и вероятностей перехода безработных из одной отрасли в другую указывают на стабильное состояние рынка труда в России в 2010–2011 гг., отсюда следует вывод о стабильности состояния экономики в эти годы: не наблюдалось ни «отмирания», ни доминирования одних отраслей над другими.

Список литературы

1. Невечеря А.П., Семенчин Е.А. Об оценке коэффициентов в математической модели самоорганизации рынка труда // Известия кубанского государственного университета. Естественные науки. – Краснодар: Издательство «КубГУ», 2013. – В. 1(2). – С. 45–48.

2. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики // Экономика и математические методы. – М.: «Наука», 2004. – Т. 40. В. 4. – С. 137–139.

3. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики // Экономика и математические методы. – М.: Наука, 2007. – Т. 43. В. 1. – С. 133–136.

4. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М.: Изд-во «ТВП», 2003. – Т. 10, № 3. – С. 740.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: «Наука. Главная редакция физико-математической литературы», 1979. – 142 с.

6. Трудовые ресурсы: Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. – URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/wages/ labour_force/# (дата обращения: 31.03.2014).

References

1. Nevecherya A.P., Semenchin E.A. *Ob otsenke koeffitsientov v matematicheskoi modeli samoorganizatsii rynka truda* [Evaluation factors in mathematical self-organization models of the labor market]. *Izvestiya kubanskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki* (Proceedings of the Kuban State University. Natural sciences). Krasnodar, KubGU Publ., 2013. Issue 1(2). pp. 45–48.

2. Semenchin E.A., Zaitseva I.V. *Matematicheskaya model samoorganizatsii rynka truda dlya dvukh otraslei ekonomiki* [Mathematical model of self-organization of the labor market for the two sectors of the economy]. Ekonomika i matematicheskie metody (Economics and Mathematical Methods). Moscow, Nauka Publ., 2004. Vol. 40, issue 4. pp. 137–139.

3. Semenchin E.A., Zaitseva I.V. *Matematicheskaya model samoorganizatsii rynka truda dlya neskolkikh otraslei ekonomiki* [Mathematical model of self-organization of the labor market for several branches of economy]. *Ekonomika i matematicheskie metody* (Economics and Mathematical Methods). Moscow, Nauka Publ., 2007. Vol. 43, issue 1. pp.133–136.

4. Semenchin E.A., Zaitseva I.V. *Matematicheskaya model samoorganizatsii rynka truda dlya neskolkikh otraslei* [Mathematical model of self-organization of the labor market for several branches]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki* (Review of Applied and Industrial Mathematics). Moscow, TVP Publ., 2003. Vol. 10, no. 3. pp. 740.

5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrectly posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 142 p.

6. Trudovye resursy: Federalnaya sluzhba gosudarstvennoi statistiki (Labor resources: Federal State Statistics Service). Available at: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/ statistics/wages/labour_force/# (accessed 31 March 2014).

Рецензенты:

Лебедев К.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры вычислительной математики и информатики, ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар;

Луценко Е.В., д.э.н., профессор кафедры компьютерных технологий и систем ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет», г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 30.04.2014.