УДК 624.131 + 539.215

# ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ ГРУНТОВ, РЕШАЕМЫЕ В ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

**Дасибеков А., Юнусов А.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Саржанова М.Ж.**

*Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова, Шымкент, e-mail: Yunusov1951@mail.ru*

В данной работе исследован процесс уплотнения грунтового слоя в виде цилиндра радиуса $R$ высотой $h$ с водопроницаемым дном и стенками под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q$, приложенной на части площади верхней поверхности с радиусом $a < R$. Уплотненный многофазный грунт считается упругоползучей стареющей средой. Здесь упругоползучее свойство стареющего уплотняемого грунта описывается теорией Г.Н. Маслова – Н.Х. Арутюняна. Для решения этой задачи, согласно основной модели В.А. Флорина, совместно рассмотрены уравнения, отражающие неразрывность твердой и жидкой фаз грунта, состояние его скелета, а также условия равновесия нестабилизированного состояния уплотняемого грунтового массива. При этом получены расчетные формулы для вычисления порового давления, суммы главных напряжений и вертикальных перемещений точек верхней поверхности уплотняемого массива.

**Ключевые слова: процесс уплотнения, грунт, деформация, давление, основания, фундамент, граничные условия, упругоползучих, функции, фильтрации, уравнения**

# AXISYMMETRIC PROBLEMS OF SOIL CONSOLIDATION THEORY SOLVED IN HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

**Dasibekov A., Yunusov A.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.S., Sarzhanova M.Z.**

*M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, e-mail: Yunusov1951@mail.ru*

Compaction process of soil layer in the form of a cylinder by $R$ radius and $h$ height with water-impermeable bottom and walls under the action of uniform loading with $q$ intensity applied on the part of the upper surface with $a < R$ radius has been studied in this paper. The compacted multiphase soil is considered to be tensile-creeping ageing environment. Here, tensile-creeping property of the compacted ageing soil is described by G.N. Maslov-N. Kh.Arutyunyan theory. According to the basic model of V.A. Florin, to solve this problem, we have considered equations reflecting solidity of solid and fluid soil phases, condition of its skeleton, and also equilibrium conditions of the compacted soil massive non-stabilized condition. At that we have obtained formula for calculation of porous pressure, sum of main stresses, and vertical displacements of the upper compactible massive points.

**Keywords: compaction process, soil, deformation, pressure, foundation, ground, boundary conditions, tensile-creeping functions, filtration equations**

Для разработки данной темы явилась причина разрушения отдельных высотных сооружений, построенных в регионах Южного Казахстана. Безусловно, такие разрушения зданий явились последствием неправильного расчета грунтовых оснований, и в основном это связано с тем, что здесь неполноценно учитывались вопросы консолидации, ползучести и свойства старения грунта.

Решение проблемы прочности и надежности возводимых сооружений при строительстве гидротехнических, крупнопромышленных, транспортных и гражданских сооружений базируется на вопросах консолидации грунтового основания с учетом его многофазной структуры. Вопросы определения конечных осадок в теории механики уплотняемых многофазных грунтов, а также учет реологических и свойства старения грунтовых оснований представляет большой интерес при строительстве любого сооружения.

Успех инженерного прогнозирования подобных процессов, протекающих в массиве глинистого грунта под действием поверхностных и объемных сил, во многом зависит от того, с какой степенью точности и полноты отражены свойства грунта и характер взаимодействия фаз и частиц в математической модели, выбранной для описания его напряженно-деформированного состояния.

В данной работе в качестве такой модели выбрана общая модель В.А. Флорина [7]. При этом упругоползучее свойство уплотняемого грунта описывается теорией Г.Н. Маслова – Н.Х. Арутюняна [6]. Согласно этой теории зависимость между коэффициентом пористости грунта и суммой главных напряжений в представлении В.А. Флорина имеет вид:

$$\varepsilon_0 - \varepsilon(M,t) = \frac{a_0}{1+\xi}\theta(M,t) - \frac{a_0}{1+\xi}\int_{\tau_1}^{t}\theta(M,\tau)\cdot K(\tau,t)\,d\tau, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_0$ – начальный коэффициент пористости; $\xi$ – коэффициент бокового давления; $\varepsilon(M,t)$ – коэффициент пористости для исследуемого момента времени $t$; $a_0$ –

коэффициент сжимаемости уплотняемого грунта; $\theta(M, t)$ – сумма главных напряжений.

Подынтегральная функция $K(\tau, t)$, входящая в соотношение (1), согласно Н.Х. Арутюняну [1] запишется в виде

$$K(\tau,t)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E}+C(\tau,t)\right];$$
$$C(\tau,t)=\varphi(\tau)\cdot a_1\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right], \quad (2)$$

где $\varphi$ – функция старения, зависящая от физико-механических свойств уплотняемого грунта; $a_1$, $\gamma_1$ – параметры ползучести; $E$ – модуль общей деформации уплотняемого грунта.

Если давление в поровой жидкости не зависит от угла $\theta$, то основное уравнение, отражающее неразрывность твердой и жидкой фаз грунта согласно [5] относительно цилиндрических координат представляется так:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\beta_{\text{ср}}(1+\varepsilon_{\text{ср}})\frac{\partial P}{\partial t}=\gamma_b^{-1}(1+\varepsilon_{\text{ср}})\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(k_1P)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right)\right], \quad (3)$$

где $\beta^1$ – коэффициент объемного сжатия; $\varepsilon_{\text{ср}}$ – средний коэффициент пористости; $P(M, t)$ – давление в поровой жидкости; $\gamma_b$ – объемный вес воды; $k_1$, $k_2$ – коэффициенты фильтрации во взаимно-перпендикулярных направлениях.

Условие равновесия нестабилизированного состояния уплотняемого грунтового массива согласно основной модели В.А. Флорина имеет вид

$$\theta(M,t)=\theta^*(M)-n\left[P(M,t)-P^*(M)\right], \quad (4)$$

где $\theta^*$, $P^*$ – сумма главных напряжений и давление в поровой жидкости для стабилизированного состояния уплотняемого грунтового массива; $x$, $y$, $z$ – координаты точки $M$.

Рассматривая совместно выражения (1)–(4), в безразмерных координатах получим уравнения вида

$$L=h^2\left(\gamma_1h^2/c_{3\nu}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\nabla^2P, \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial P}{\partial\tau}\right|_{\tau=T_1}+2a_1a^{(2)}\left(c_0h^2/c_{3\nu}+\frac{A_1}{\tau_1}\right)P(\tau_1)=h^2\nabla^2P+3a_1a^{(3)}\gamma_1\times$$
$$\times\left(c_0h^2/c_{3\nu}+\frac{A_1}{\tau_1}\right)\cdot\left(\frac{\theta^*}{3}+P^*\right); \quad (6)$$

$$P(\tau_1)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\theta^*}{3}+P^*\right). \quad (7)$$

Здесь $L$ – дифференциальный оператор вида

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1\left[\left(1+2a_1a^{(2)}c_0\right)\Big/c_0^{(2)}h^2+\frac{2a_1a^{(2)}A_1}{T}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial t}-h^2\left(\frac{\gamma_1}{h^2c_\nu^{(2)}}+\frac{\partial}{\partial T}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right); \quad (8)$$

$$\nabla^2P=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2P}{\partial\xi^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2P}{\partial\eta^2}; \quad (9)$$

$\xi$, $\eta$ – безразмерные координаты; $c_0$ – предельное значение меры ползучести для уплотняемого грунта; $A_1$ – параметр, зависящий от свойств и условий старения грунта; $a_0$, $\beta_{\text{ср}}$, $\xi$, $k$, $\gamma_b$, $\varepsilon_{\text{ср}}$ – параметры грунта.

Далее решим систему уравнений (5)–(8) применительно к ограниченной области уплотнения. Вначале решим для уплотнения слоя грунта в виде цилиндра радиуса $R$ высотой $h$ с водопроницаемым дном и стенками под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q$, приложенной на части площади верхней поверхности с радиусом $a < R$. Уплотненный многофазный грунт считается упругоползучей стареющей средой. Применительно к этой схеме требуется определить непрерывную функцию $P$ в области $(G = (0 < r < R;\ 0 < x_3 < h;\ t > 0)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению вида (5) и граничным условиям

$$\alpha^{(oc)}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\beta^{(oc)}P=0;\quad x_1=\xi;$$
$$x_2=\eta\begin{cases}\alpha^{(oc)}=0 & \text{при }\ \eta=1\\ \beta^{(oc)}=0 & \text{при }\ \xi=1\ u\text{‘}u\ \ \eta=0.\end{cases} \qquad (10)$$

Здесь

$$\xi=\frac{r}{R};\quad \eta=\frac{x_3}{h};$$
$$\tau=\frac{c_{3\nu}t}{h^2}. \qquad (11)$$

Решение данной краевой задачи (5)–(10) при (11) дает возможность определить давление в поровой жидкости для любого момента времени относительно безразмерных координат.

Начальное распределение порового давления для рассматриваемой задачи относительно безразмерных координат представляется в виде

$$P_0=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\sigma_{kk}^*}{3}+P^*\right)=\frac{q}{\omega}\left[\frac{a^2}{R^2}+\frac{2a}{R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\mu_m^{(1)}\frac{a}{R}\right)}{\mu_m^{(1)}J_0^2\left(\mu_m^{(1)}\right)}\cdot\frac{ch\frac{\mu_m^{(1)}h}{R}\eta}{ch\frac{\mu_m^{(1)}h}{R}}\cdot J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right)\right], \qquad (12)$$

где $\mu_m^{(1)}$ – является бесчисленным множеством положительных корней трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)=0; \qquad (13)$$

$J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядка.

Здесь необходимо заметить, когда $\eta = 1$ сумма ряда, полученная из (12) при $\xi<\frac{a}{R}$ равна $q$, а при $\xi>\frac{a}{R}$ – нулю, соответствует краевым значениям исследуемой задачи для начального момента времени.

Решение краевой задачи (5)–(10) представим в виде

$$P(\xi,\eta,\tau)=\frac{q}{\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[c_{1\text{mnk}}F\left(\wp_{mk},c,r_{mk}\right)+c_{2mk}G\left(\wp_{mk},c,r_{mk}\right)\cdot e^{-\lambda_{mk}^{\tau}}\times$$
$$\times\tau^{1-D^{(3)}}J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}\eta\Big], \qquad (14)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\wp_{mk}=\lambda_{mk}(2-D)-(1-D)M_{mk};\quad C_{1mk}=\left(M_{1mk}Z_{2mk}-M_{2mk}G\right)N_{mk};\\
&\lambda_{mk}=0,5\left(M_{mk}-\sqrt{M_{mk}^2-\Phi_{mk}}\right);\quad \mathrm{r}_{mk}=\sqrt{M_{mk}^2-\Phi_{mk}}\tau;\\
&C_{2mk}=-N_{mk}(M_{1mk}Z_{1mk}-M_{2mk}F_{mk});\qquad Z_{1mk}=F+D_{mk}F;\\
&Z_{2mk}=G'+D_{mk}G;\quad M_{1mk}=H_{mk};\quad M_{2mk}=\omega R_{m1}H_{mk};\\
&D_{mk}=R+\alpha_{mk}-\lambda_{mk}+(1-D\ \tau_1^{-1});\ N_{mk}=\frac{1}{F\alpha_{2mk}-GZ_{1mk}};\\
&H=\frac{a}{R}\frac{(-1)^k\left(2k+\nu\pi Z_1\right)\left(\mu_m^{(1)}\frac{a}{R}\right)\mathrm{th}\mu_m^{(1)}\frac{h}{R}}{\mu_m^{(1)}J_0^2\left(\mu_m^{(1)}\right)\cdot\alpha_{mk}^2};\quad \alpha_{mk}^2=\left(\mu_m^{(1)}\frac{h}{R}\right)^2+\left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Выражение (14) при (15) действительно является решением уравнения (5), удовлетворяющим граничным условиям (10). В этом можно легко убедиться непосредственной подставкой (14) в (5)–(10).

Сумму главных напряжений в грунтовом цилиндре можно вычислить по формуле

$$\theta(\xi,\eta,\tau)=\frac{q}{\omega}\left\{\frac{a^2}{R^2}+\frac{2a}{R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\mu_m^{(1)}\frac{a}{R}\right)}{\mu_m^{(1)}J_0^2\left(\mu_m^{(1)}\right)}\cdot\frac{ch\frac{\mu_m^{(1)}h}{R}\eta}{ch\frac{\mu_m^{(1)}h}{R}}\cdot J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right)\right\}-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{1mk}F+C_{2mk}G\right]\cdot e^{-\lambda_{mk}\tau}\tau^{1-D^{(3)}}J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}\eta. \quad (16)$$

После определения суммы главных напряжений осадку уплотняемого слоя грунта можно вычислить по формуле

$$S=\varepsilon_0^{(3)}\int_0^1\left[\theta(\xi,\eta,\mu,T)+a_1\gamma_1\int_{T_1}^{T}\theta(\xi,\eta,\mu,\tau)\cdot e^{-\gamma_1(T-\tau)}d\tau\right]d\mu, \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_0^{(3)}=h/(1+2\xi)\cdot(1+\varepsilon_0).$$

Выражение (16), подставив в (17) осадку слоя грунта, представим в виде

$$S(t)=\varepsilon_0^{(oc)}\left(S_0^{(oc)}+a_1\gamma_1 S_1^{(oc)}\right), \quad (18)$$

где

$$S^{(oc)}=\frac{a^2}{R^2}+\frac{2a}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\mu_m^{(1)}\frac{a}{R}\right)\cdot \mathrm{th}\frac{\mu_m^{(1)}h}{R}}{\left[\mu_m^{(1)}\right]^2 J_0^2\left(\mu_m^{(1)}\right)}\cdot J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right);$$

$$S_0^{(oc)}=S^{(oc)}-2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{1mk}F+C_{2mk}G\right)\cdot e^{-\lambda_{mk}\tau}\tau^{1-D}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right);$$

$$S_1^{(oc)}=\frac{S^{(oc)}}{\gamma_1}\left[1-e^{-\gamma_1(\tau-\tau_1)}\right]-2\int_{r_1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\left(C_{1mk}F+C_{2mk}G\right)\times$$

$$\times e^{-\lambda_{mk}\tau}\tau^{1-D}\cdot J_0\left(\mu_m^{(1)}\xi\right)=\frac{qh}{\omega(1+2\xi)\cdot(1+\varepsilon_0)}.$$

Таким образом, выражениями (14) и (17) будут вычислены поровое давление и вертикальные перемещения точек верхней поверхности уплотняемого массива. Они в основном зависят от параметров $a_0$, $c_0$, $\beta_{ср}$, $k$, $\varepsilon_{ср}$, определяемых по результатам компрессионных испытаний грунтов, по величинам начального, конечного и изменяющегося во времени порового давления и осадок.

Аналогичные задачи теории консолидации грунтов исследованы в работах [2–4, 8].

**Список литературы**

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехтеор-издат, 1952, – 323 с.

2. Дасибеков А., Юнусов А., Айменов Ж., Алибекова Ж. Задачи теории консолидации грунтов, решаемые в функциях кумера // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 4. – С. 89–96

3. Дасибеков А., Юнусов А.А., Сайдуллаева Н.С., Юнусова А.А Консолидация неоднородных упругих и упругоползучих грунтов // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 8. – С. 67–72.

4. Dasibekov A., Yunusov A.A., Yunusova A.A., Abylasimova E.A., Mavlankozhayev R.B. Consolidation of tensile-creeping heterogeneous earth foundations // European journal of natural history. – 2013. – № 6. – P. 76–77.

5. Мачерет Я.А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенной нагрузкой // Труда ВИОС. – 1934. – № 4. – С. 65–121.

6. Тер-Мартиросян З.Г. Нуриджанян С.Ш. Нелинейная консолидация глин с учетом старения // Сборник трудов МИСИ. – М., 1976. – № 140.

7. Флорин В.А. Основы механики грунтов.– М.: Госстройиздат, 1959. т. 1,2.–357 с.; 1961.–543 с.

8. Юнусов А.А., Дасибеков А., Юнусова А.А., Мадияров Н.К. Об одной методике исследования задач консолидации упругоползучих неоднородных грунтовых оснований // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10 (часть3). – С. 521–528.

## References

1. Arutyunyan N.Kh. Some questions on creeping theory. M: Gostechtheor-isdat, 1952, 323 p.

2. Dasibekov A., Yunusov A., Aimenov Zh., Alibekova Zh. Problems of soil consolidations theory solved in Kummer's functions // The progress of modern natural science, 2014 no. 4 pp. 89–96.

3. Dasibekov A., Yunusov A.A., Saidullayeva N.S., Yunusova A.A. Consolidation of heterogeneous tensile and tensile-creeping soils // International journal for experimental education, 2012, no. 8 pp. 67–72.

4. Dasibekov A., Yunusov A.A., Yunusova A.A., Abylasimova E.A., Mavlankozhayev R.B. Consolidation of tensile-creeping heterogeneous earth foundations // European journal of natural history 2013. no. 6 pp. 76–77.

5. Macheret Ya.A. Distribution of instantaneous pressures in the soil mass caused by transient load // Works of VIOS. 1934, no. 4. pp.65–121.

6. Ter-Martirosyan Z.G., Nuridzhanyan S.Sh. Non-linear consolidation of clays taking into account ageing. Collection of MISI works, no. 140, M., 1976.

7. Florin V.A. Foundations of soil engineering. M.: Gosstroyizdat, 1959. Vol. 1,2. 357 p.; 1961. 543 p.

8. Yunusov A.A., Dasibekov A., Yunusova A.A., Madiyarov N.K. About one research technique of tensile-creeping heterogeneous soil foundations consolidation problems // Basic researches – 2013, no. 10 (part 3), pp. 521–528.

**Рецензенты:**

Печёрский В.Н., д.т.н., профессор, Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент;

Бровко И.С., д.т.н., профессор, Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент.

Работа поступила в редакцию 30.04.2014.