УДК 517.91

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРЯМОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Ляпцев С.А.

Уральский государственный горный университет, Екатеринбург, e-mail: Sergey.Lyapcev@m.ursmu.ru

В статье предложен метод, позволяющий получить решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями по единой методике, не зависящей от вида неоднородности, которую они содержат. Метод прост в использовании и может применяться как для непрерывной, так и для разрывной функции, представляющей неоднородность. Для применения предлагаемого метода достаточно вычислить два интеграла специального вида и по выражениям этих интегралов записать общее решение. Все возможные варианты решений продемонстрированы на конкретных примерах: решение линейного однородного уравнения, непрерывная функция в качестве неоднородности, резонанс, кусочно-линейная правая часть уравнения. На тех же примерах показано, что стандартным общепринятым методом решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений и методом прямого интегрирования получаются одинаковые результаты.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, неоднородность, начальные условия, интегрирование, общее решение, колебания

THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTION BY THE METHOD OF DIRECT INTEGRATION

Lyaptsev S.A.

Ural state mining university, Yekaterinburg, e-mail: Sergey.Lyapcev@m.ursmu.ru

This paper proposes a method to obtain the solution of inhomogeneous linear differential equations with given initial conditions using the same methodology that does not depend on the type of heterogeneity they contain. The method is simple to use and can be used for both continuous and discontinuous function for representing irregularity. To apply the proposed method is sufficient to calculate the two integrals of a special form and expressions of these integrals write the general solution. All possible solutions are demonstrated by specific examples: the solution of a linear homogeneous equation, continuous function as heterogeneity, resonance, piecewise linear right-hand side of the equation. At the same examples show that the standard accepted method for solving linear inhomogeneous differential equations and the method of direct integration obtained the same results.

Keywords: linear differential equation, heterogeneity, initial conditions, integration, general solution, fluctuations

Существует довольно много методов решения линейных дифференциальных уравнений (см., например, [2]). Наиболее распространенным методом является поиск общего решения в виде суммы общего решения однородной части данного линейного уравнения и частного решения, подбираемого по виду неоднородности [4]. Каждый вид неоднородности предполагает собственный вид частного решения, которое, как правило, ищется методом неопределенных коэффициентов. Поскольку вид частного решения зависит от вида неоднородности и не всегда может быть выражен в общем виде, его поиск часто представляет собой самостоятельную задачу и может потребовать специальных ухищрений. Однако существует метод, позволяющий найти общее решение линейного дифференциального уравнения непосредственным интегрированием без разложения уравнения на однородную и неоднородную части, применение которого наиболее удобно при решении задач теории колебаний [1]. Решение ищется специальным приемом, сочетающим метод неопределенных коэффициентов с интегрированием. Модифицируя метод, изложенный в [1], будем искать общее решение неоднородного уравнения так:

$$\ddot{x} + k^2 x = F(t), \qquad (1)$$

где $k = \text{const}$; $F(t)$ – произвольная функция времени t, в виде

$$x = A\cos kt, \qquad (2)$$

здесь A – искомая переменная функция.

Продифференцировав по времени выражение (2), получим

$$\dot{x} = \dot{A}\cos kt - A\cdot k\sin kt. \qquad (3)$$

Подставив в уравнение (3) начальные условия $x = x_0$, $\dot{x} = V_0$ при $t = 0$, запишем соответствующие начальные условия для новой переменной $A(t)$ следующим образом:

$$A(0) = x_0; \quad \dot{A}(0) = V_0. \qquad (4)$$

Дифференцируем далее равенство (3) и подставляем полученное выражение в исходное дифференциальное уравнение

$$\ddot{A}\cos kt - 2\dot{A}k\sin kt = F(t). \qquad (5)$$

Если умножить обе части уравнения (5) на $\cos kt$, то можно заметить, что в полученном уравнении

$$\ddot{A}\cos^2 kt - 2\dot{A}k\sin kt\cdot\cos kt = F(t)\cdot\cos kt \quad (6)$$

левая часть представляет собой полную производную

$$\frac{d}{dt}(\dot{A}\cos^2 kt). \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (6) можно проинтегрировать методом разделения переменных [1], умножив обе его части на dt,

$$\int d(\dot{A}\cos^2 kt) = \int F(t)\cdot\cos kt\ dt. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\dot{A}\cos^2 kt - \dot{A}(0) = \int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt. \quad (9)$$

Учитывая второе начальное условие (4), получим

$$\frac{dA}{dt} = (V_0 + \int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt)/\cos^2 kt, \quad (10)$$

откуда

$$\int dA = V_0\int\frac{dt}{\cos^2 kt} + \int\left(\int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt\right)\frac{dt}{\cos^2 kt}. \quad (11)$$

После интегрирования с учетом первого начального условия (4) находим значение искомой функции

$$A(t) = x_0 + \frac{V_0}{k}\mathrm{tg}kt + \int_0^t\left(\int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt\right)\frac{dt}{\cos^2 kt} \quad (12)$$

и общее решение уравнения (1) при заданных начальных условиях как

$$x = x_0\cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt + \int_0^t\left(\int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt\right)\frac{dt}{\cos^2 kt}\cdot\cos kt. \quad (13)$$

Приведем *некоторые ПРИМЕРЫ*, демонстрирующие универсальность применяемого метода.

1. При $F(t) = 0$ уравнение (1) – обычное уравнение свободных гармонических колебаний – имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (14)$$

решение которого известно

$$x = x_0\cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt. \quad (15)$$

Очевидно, оно является частным случаем выражения (13).

2. При $F(t) = t$ стандартное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = t \quad (16)$$

следует искать как сумму общего решения однородного и частного решения, подбираемого по виду правой части

$$x_{\text{ОДН}} = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \quad (17)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

$$x_{\text{ЧАСТ}} = a\,t, \quad (18)$$

здесь a – константа, подлежащая определению.

После подстановки частного решения (18) в уравнение (16) получим

$$k^2 at = t, \quad (19)$$

откуда $a = 1/k^2$.

После определения частного решения находим значения произвольных постоянных C_1, C_2 по заданным начальным условиям. Для этого подставляем их в общее суммарное решение

$$x = x_{\text{ОДН}} + x_{\text{ЧАСТ}} = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{t}{k^2} \quad (20)$$

и его производную

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt + \frac{1}{k^2}. \quad (21)$$

Подставляя $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = V_0$ в уравнения (20) и (21), получим

$$C_1 = x_0,\quad C_2 = \frac{V_0}{k} - \frac{1}{k^3}. \quad (22)$$

Таким образом,

$$x = x_0\cos kt + \left(\frac{V_0}{k} - \frac{1}{k^3}\right)\cdot\sin kt + \frac{t}{k^2}. \quad (23)$$

Покажем, что представленное стандартное решение полностью соответствует решению (13). Для этого следует вычислить всего два интеграла

$$1)\ \int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt = \int_0^t t\cdot\cos kt\ dt = \frac{1}{k}t\sin kt + \frac{1}{k^2}(\cos kt - 1); \tag{24}$$

$$2)\ \int_0^t\left(\int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt\right)\frac{dt}{\cos^2 kt} = \frac{1}{k}\int_0^t\frac{t\sin kt}{\cos^2 kt}dt + \frac{1}{k^2}\int_0^t\frac{(\cos kt-1)}{\cos^2 kt}dt = \frac{t}{k^2\cos kt} - \frac{1}{k^3}\,\mathrm{tg}\,kt. \tag{25}$$

Подставив полученные выражения в (13), убеждаемся, что решение полностью совпадает с соотношением (23).

3. Резонанс.

Вынужденные колебания для случая резонанса рассмотрим на примере уравнения

$$\ddot{x} + x = \sin t \tag{26}$$

с нулевыми начальными условиями

$$x = 0,\ V_0 = 0. \tag{27}$$

Для получения частного решения с заданными начальными условиями вычисляем указанные выше два интеграла

$$1)\ \int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt = \int_0^t \sin t\cdot\cos t\ dt = \frac{1}{2}\sin^2 t; \tag{28}$$

$$2)\ \int_0^t\left(\int_0^t F(t)\cdot\cos kt\ dt\right)\frac{dt}{\cos^2 kt} = \frac{1}{2}\int_0^t\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,t - t). \tag{29}$$

Таким образом,

$$x = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,t - t)\cdot\cos t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t). \tag{30}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что решение (30) удовлетворяет уравнению (26) и нулевым начальным условиям.

Разработанный метод легко распространить на случаи различных законов изменения неоднородности на разных участках. В работе [3] решение уравнения колебаний определялось на каждом участке отдельно и стыковалось граничными условиями: конечные условия предыдущего участка являлись начальными для следующего. Метод прямого интегрирования позволяет объединить все решения в одно.

4. Уравнение с кусочно-непрерывной неоднородностью. Если на разных участках изменения независимой переменной неоднородность представлена разными выражениями, то решение следует проводить аналогично составлению универсального уравнения упругой линии балки в сопротивлении материалов [5]: *функцию, заданную на ограниченном участке, следует продолжить до конца промежутка интегрирования, приложив с противоположной стороны симметричную относительно оси абсцисс функцию*.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/3; \\ -1 & t \ge \pi/3. \end{cases} \tag{31}$$

На I участке, где $0 \le t < \pi/3$ $F_{\mathrm{I}}(t) = 1$. На II участок, где $t \ge \pi/3$, продлеваем функцию $F_{\mathrm{I}}(t) = 1$, компенсируя ее действие симметричной относительно оси абсцисс функцией $-F_{\mathrm{I}}(t) = -1$. Складывая на участке II $-F_{\mathrm{I}}(t)$ и заданное выражение, получим для второго участка $F_{\mathrm{II}}(t) = -2$. Таким образом, неоднородность в уравнении (31), начиная с I участка и до конца промежутка интегрирования представлена функцией $F_{\mathrm{I}}(t) = 1$. Начиная со II участка и до конца промежутка интегрирования $F(t) = F_{\mathrm{I}}(t) + F_{\mathrm{II}}(t) = -2$ (от участка к участку количество слагаемых увеличивается). Решаемое дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\ddot{x} + x = {}^{1}\!/_{I} + {}^{-2}\!/_{II}. \tag{32}$$

Далее применяем метод прямого интегрирования

$$\int_0^t F(t)\cos t = \int_0^t \cos t \Big/_{I} + \int_{\pi/3}^t (-2\cos)t \Big/_{II} =$$

$$= \sin t - \sin 0 \Big/_{I} - 2\sin t + 2\sin \pi/3 \Big/_{II} = \sin t \Big/_{I} - 2\sin t + \sqrt{3} \Big/_{II}. \qquad (33)$$

$$\int_0^t \frac{\sin t}{\cos^2 t} \Big/_{I} - \int_{\pi/3}^t \left(\frac{2\sin t - \sqrt{3}}{\cos^2 t}\right) \Big/_{II} = \frac{1}{\cos t} - 1 \Big/_{I} - 2\left(\frac{1}{\cos t} - 2\right) - \sqrt{3}\cdot(\mathrm{tg}t - \sqrt{3}) \Big/_{II}. \qquad (34)$$

Для $t < \pi/3$ решение записываем только по выражению на I-м участке

$$x = \left[\frac{1}{\cos t} - 1\right)\cdot\cos t \Big/_{I} = 1 - \cos t. \qquad (35)$$

Для $t \geq \pi/3$ общее решение уравнения (31) представляется суммой

$$\left(\frac{1}{\cos t} - 1 - \frac{2}{\cos t} + 4 + \sqrt{3}\cdot\left(\mathrm{tg}t - \sqrt{3}\right)\right)\cos t = \sqrt{3}\sin t - 1. \qquad (36)$$

Таким образом, на каждом участке решение получено независимо от остальных.

Список литературы

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2006. – 731 с.

2. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

3. Косенко Е.А. Обоснование параметров привода вибротранспортных машин: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Екатеринбург: УГГУ, 2012. – 20 с.

4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Ц.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. – 4-е изд. испр. – М.: Едиториал, 2002. – С. 188–191.

5. Мокрушин Н.В., Ляпцев С.А. Сопротивление материалов: конспект лекций: учебное пособие. – Екатеринбург: УГГУ, 2014. – С. 80–84.

References

1. Butenin N.V., Luntz J.L., Merkin D.R. Course of Theoretical Mechanics. St. Petersburg: Lan, 2006. 731 p.

2. Demidovich B.P., Modenov V.P. Differential Equations: Textbook. 3-rd ed. St. Petersburg: Lan, 2008. 288 p.

3. Kosenko E.A. Justification drive parameters of vibromachines. Dissertation author’s abstract on scientific degree of candidate of technical sciences. Ekaterinburg: Ural State Mining University, 2012 . 20 p.

4. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko Ts.I. Ordinary Differential Moscow: Equations, 2002. Problems and examples with detailed solutions. 4-th ed. Corr.editorial, 2002. pp. 188–191 .

5. Mokrushin N.V., Lyaptsev S.A. Strength of materials. Summary of lectures: Textbook. Ekaterinburg: Ural State Mining University, 2014. pp. 80–84.

Рецензенты:

Красовский А.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры графики и деталей машин Уральского государственного аграрного университета, г. Екатеринбург;

Мальцев В.А., д.т.н., профессор, директор института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета, г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 11.04.2014.