

УДК 621.3.078:629.7.051.8

## КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ И КРИТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

**Казанцев В.П., Даденков Д.А.**

*ГОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,  
Пермь, e-mail: kvppgtu@mail.ru*

Рассмотрены вопросы разработки критериев подобия относительного движения космических аппаратов на заключительном этапе их сближения и стыковки. С учетом известных допущений в качестве базовой принята математическая модель относительного движения с применением визирной системы координат, связанной с одним из сближающихся космических аппаратов. Показано, что для решения задач оптимального управления двигательными установками малой тяги активного космического аппарата целесообразно установление критериев подобия, позволяющих апробировать алгоритмы управляемого относительного движения методами математического, а также физического моделирования с применением наземной стендовой аппаратуры. Установлено, что никакие иные критерии, кроме входящих в критериальные уравнения, не могут служить основой подобия процессов относительного движения космических аппаратов при принятых допущениях плоского сближения аппаратов. Рассмотрена также возможность имитации процессов сближения-расхождения космических аппаратов в наземных условиях, а также предложены варианты реализации кинематических схем имитационных испытательных стендов. Имитационное моделирование процессов сближения-расхождения космических аппаратов произведено в интегрированной системе *MatLab/Simulink*, позволяющей подтвердить адекватность теоретических и модельных решений, включая наземные испытания.

**Ключевые слова:** критерии подобия, космические аппараты, сближение, имитационное моделирование

## SIMILARITY CRITERIA AND CRITERIAL EQUATIONS FOR SIMULATION OF SPACECRAFT RELATIVE MOTION

**Kazantsev V.P., Dadenkov D.A.**

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, e-mail: kvppgtu@mail.ru*

Here are presented approaches developing criteria of spacecraft relative motion similarity at the final stage of the rendezvous and docking. Based on the known as the basic assumptions are proposed by the relative movement mathematical model using target coordinate systems associated with one of the near-Earth space vehicles. It is shown that for solving problems of optimal control active low-thrust propulsion it is useful to create similarity criteria to test the controlled relative motion algorithms with the help of mathematical and physical modeling methods using ground equipment. Found that none of the other criteria and those of criteria equations cannot form the basis of the spacecraft relative motion similarity with the flat approximation assumptions. In addition have been suggested the spacecraft convergence-divergence processes and on-ground-applications simulating possibility, as well as basic kinematic diagram test benches. So the model and results of simulation using integrated MatLab/Simulink system allows you to confirm the adequacy of theoretical as well on-ground simulation testing.

**Keywords:** the similarity criteria, cosmic apparatus, convergence, simulation

В работе рассматривается процесс сближения-стыковки-расхождения (ССР) космических аппаратов (КА) на околоземной орбите на заключительном этапе после вывода активного космического аппарата (АА) на орбиту сближения с пассивным космическим аппаратом (ПА). Стыковка аппаратов в этом случае рассматривается как заключительная фаза этапа сближения, а расстыковка – как начальная фаза их расхождения. Фактически это означает, что речь идет о дистанциях между двумя КА, не превышающих нескольких километров на начальной стадии или десятков-сотен метров на заключительной стадии процесса сближения. Расстыковка как специфический процесс расхождения аппаратов на безопасное расстояние для последующих операций движения в околоземном пространстве формально описывается теми же уравнениями, что и процесс стыковки. В функции ПА в про-

цессе ССР входит ориентация главной оси стыковочного узла по линии визирования (ЛВ) двух КА. Наземный центр управления полетом (ЦУП) на этой стадии не способен, по сути, эффективно управлять собственно процессом ССР КА. При этом реализуют варианты автономного управления процессом ССР как с применением бортовой ЦЭВМ АА и/или ПА, так и в телеоператорном режиме (ТОР) [2, 10]. В качестве ПА может рассматриваться, например, международная космическая станция (МКС), а в качестве АА – пилотируемый или беспилотный транспортный КА одной из стран-участниц международного проекта, например Российские корабли модифицированных серий «Союз» или «Прогресс» при стыковке с российскими сегментами стыковочных модулей МКС.

Актуальность задачи разработки критериальных уравнений обусловлена малой

изученностью нелинейных многомерных процессов ССР именно на стадии, когда происходит встреча КА и, соответственно, проблемами, требующими разработки новых подходов к решению задач качественной оценки возможностей управления вблизи так называемых бифуркационных точек фазовых траекторий относительного движения КА [8]. Проблемы стыковки и нештатные ситуации при этом достаточно подробно описаны в [10].

### Основная часть

Полагаем, что ПА находится на круговой орбите, дистанция между сближающимися КА много меньше расстояния от них до центра притяжения Земли, а сближение происходит в безгравитационном поле. Примем также иные известные допущения об отсутствии сил аэродинамического сопротивления, о несферичности Земли, неоднородности распределения ее масс и т.п. [2, 8].

При описании относительного движения КА будем использовать одну из наиболее распространенных в практике автономного сближения кораблей визирную систему координат (СК) [2, 4, 8], описывающую процессы ССР в полярной СК. Рассматриваемый динамический процесс после ряда преобразований при переходе от орбитальной к визирной СК в скалярной форме может быть представлен системой дифференциальных уравнений [4, 8]:

$$\begin{cases} \ddot{D}(t) - D(t) \dot{q}^2(t) = a_D(t), \\ D(t) \ddot{q}(t) + 2\dot{D}(t) \dot{q}(t) = a_q(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $D(t)$ ,  $\dot{D}(t)$ ,  $\ddot{D}(t)$  – соответственно относительное расстояние между стыковочными узлами КА по ЛВ, относительные линейные скорость и ускорение аппаратов;  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t)$  – относительные угловые скорость и ускорение вращения ЛВ в плоскости орбиты сближающихся аппаратов;  $a_D(t)$ ,  $a_q(t)$  – ортогональные управляющие ускорения центра масс АА, пропорциональные сигналам управления ДУ малой тяги.

В теории управления двигательными установками (ДУ) КА принято оперировать не «управляющими ускорениями» (понятие, принятое инженерами в области общей теории навигации и управления), а таким эквивалентным понятием, как «импульс скорости». Фактически и в том, и в другом случае речь идет о приращении скорости (м/с), полученной КА в конкретном направлении под действием импульса тяги ДУ за время работы ДУ. Современные электро-реактивные двигатели, работающие в режимах малой тяги, способны реализовать,

в частности, широтно-импульсное управление приращением скорости с периодами выдачи импульсов тяги, не превышающим нескольких микросекунд [7]. Это позволяет говорить о возможности реализации квазианалогового управления ДУ малой тяги, применяемых в качестве сближающе-корректирующих двигателей или двигателей причаливания и ориентации. При этом реализуется аппроксимация импульсно модулированных управлений их непрерывными зависимостями.

Пусть имеется вторая динамическая система, описываемая уравнениями, аналогичными (1), которую будем рассматривать в качестве имитационной модели:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) - R(t) \dot{u}^2(t) = a_R(t), \\ R(t) \ddot{u}(t) + 2\dot{R}(t) \dot{u}(t) = a_u(t). \end{cases} \quad (2)$$

Физическая и математическая сущности переменных в уравнениях (2) аналогичны (1). Заметим, что обе математические модели (1) и (2) описывают плоское движение материальных точек в некоторых системах отсчета. Имитационная модель (2) может описывать подобную ей систему сближения двух КА в визирной СК. Тогда начало координат визирной СК помещают в точку визирования ПА, а управляющие ускорения, реализуемые ДУ малой тяги, прикладывают к центру масс АА. Но имитационная модель (2) может описывать и некий наземный испытательный стенд, осуществляющий плоское движение и формирующий в некоторой его точке кажущиеся ускорения (перегрузки), подобные управляющим ускорениям ССР модели (1). Тогда начало координат подвижной СК можно поместить на оси вращения стенда (рис. 1), вдоль радиуса вращения которого перемещают некоторую материальную точку, для которой в силу ее плоского движения справедливы соотношения (2). Тогда, связывая эту материальную точку с центром чувствительности двухосевого акселерометра, можно сформировать в ней два ортогональных ускорения, направленных вдоль радиуса вращения (по оси  $y$ ) и по касательной к траектории вращения точки (по оси  $x$ ).

На рис. 1 приняты следующие СК стенда:  $Ox_0Y_0Z_0$  – неподвижная (абсолютная) СК;  $Ox_1Y_1Z_1$  – подвижная СК, связанная со стендом;  $mxuz$  – подвижная СК, связанная с перемещаемой точкой  $m$ .

Одна из возможных кинематических структур [5, 6, 9] такого наземного испытательного стенда приведена на рис. 2. Ротационный стенд содержит несущую конструкцию (НК) 1, поворачиваемую

вокруг вертикальной оси с помощью электропривода 2, и испытательную платформу (ИП) 3, перемещаемую радиально вдоль НК с помощью электропривода 4 и передачи 5 «винт-гайка». На ИП установлен двух-

осевой акселерометр 6 (датчик перегрузок). Радиальное перемещение ИП может быть реализовано с применением иного типа кинематической передачи или с помощью реверсивного линейного электропривода.

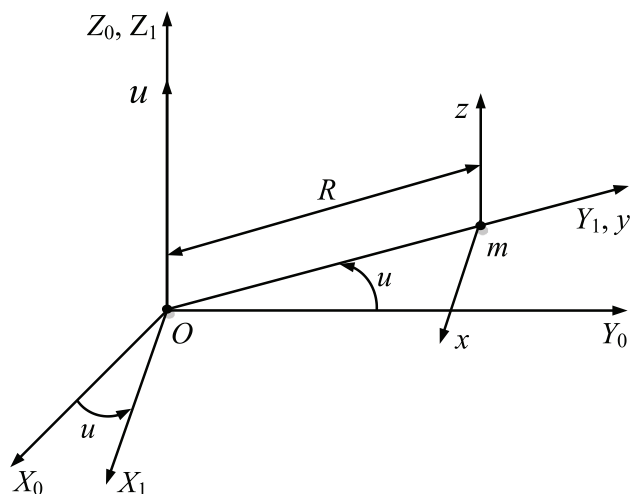


Рис. 1. Системы координат стенда

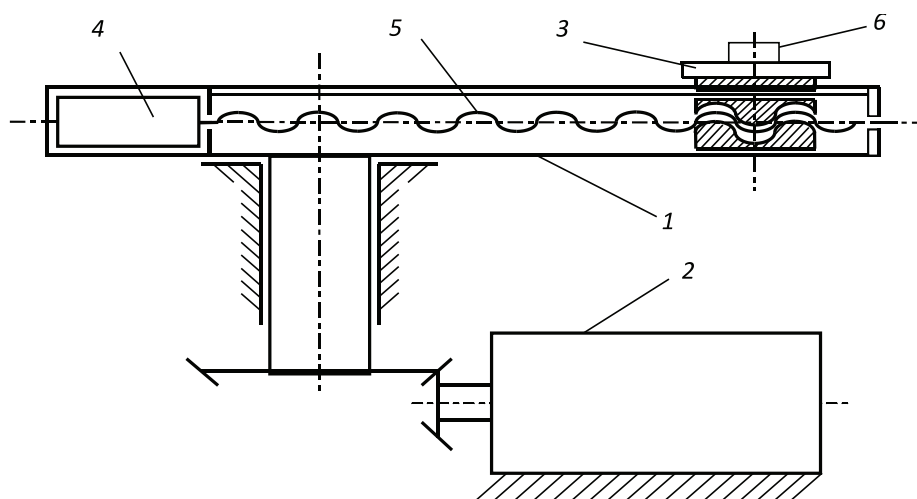


Рис. 2. Кинематическая схема ротационного стенда

Разумеется, в наземных условиях невозможно имитировать процессы ССР КА со сколь угодно произвольными начальными или конечными дистанциями между кораблями. Это означает, что необходимо установить критерии подобия имитационной модели (1) и природы (2).

*Метод теории подобия*, применение которого здесь более чем оправдано, призван оптимизировать алгоритмы процессов ССР и распространить их на движение КА. Как известно, для любой динамической системы можно составить достаточно большое число критериев подобия, но, в любом слу-

чае, они должны отражать сущность тех или иных физических процессов [1].

Полагая, что геометрическое и временное подобие рассматриваются в процессах ССР как данность (это неперменные атрибуты как минимум кинематического подобия [1, 3]), приведем эти уравнения к безмерной форме.

Для этого сначала введем критерий-симплекс, устанавливающий геометрическое подобие процессов, отвечающих имитационной модели и натуре:

$$K_1 = R/D. \quad (3)$$

Введем число подобия, характеризующее размерность управляющих ускорений в международной системе единиц:

$$N_1 = 1 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Заметим, что при  $K_1 = \text{const}$  имеем:

$$\dot{R}(t) = K_1 \dot{D}(t), \quad \ddot{R}(t) = K_1 \ddot{D}(t). \quad (5)$$

Помножим члены уравнения (1) на выражение (3) и разделим на выражение (4). С учетом соотношений (5) в результате получим критериальные уравнения процесса плоского движения безотносительно модели и природы в виде:

$$\begin{cases} \dot{R}_0(t) - R_0(t)\dot{u}_0^2(t) = a_{r0}(t), \\ R_0(t)\ddot{u}_0(t) + 2\dot{D}_0(t)\dot{u}_0(t) = a_{u0}(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $R_0(t)$ ,  $\dot{R}_0(t)$ ,  $\ddot{R}_0(t)$  – безразмерные фазовые переменные (расстояние, скорость и ускорение) линейного движения двух объектов;  $\dot{u}_0(t)$ ,  $\ddot{u}_0(t)$  – безразмерные фазовые переменные (угловые скорость и ускорение) вращательного движения двух объектов вокруг оси начала координат полярной СК одного из объектов;  $a_{r0}(t)$ ,  $a_{u0}(t)$  – безразмерные управляющие ускорения, действующие соответственно по нормали и по касательной к траектории плоского движения одного подвижного объекта по отношению к другому.

Критериальные уравнения (6) пригодны для описания любого плоского движения, в том числе и процесса ССР двух КА.

Заметим, что определяющие параметры  $R(t)$ ,  $\dot{R}(t)$ ,  $\ddot{R}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$ , входящие в левые части уравнений имитационной модели (2), имеют независимые размерности. Поскольку в соответствии с  $\pi$  – теоремой [1] число нетривиальных критериев подобия меньше числа определяющих физических параметров с различными размерностями на величину, равную числу определяющих параметров с независимыми размерностями, то вопрос об установлении иных критериев подобия теряет смысл.

Для соблюдения подобия рассматриваемых динамических процессов требуется подобие также начальных и граничных условий для всех сходственных точек (координат) природы и модели. С учетом выражений (5), (6) на основе элементарных логических умозаключений несложно доказать, что при соблюдении геометрического подобия (3) никакие варианты введения иных, кроме единичных, коэффициентов подобия для угловых фазовых переменных (угла смещения ЛВ в плоскости орбиты относительно заданного направления, угло-

вой скорости и углового ускорения ЛВ) не способны удовлетворить одновременно уравнениям (1) и (2), а следовательно, критериальному уравнению (6). Результаты моделирования процессов ССР в соответствии с уравнениями (6) в системе Matlab/Simulink полностью подтвердили адекватность рассматриваемых критериев подобия и критериальных уравнений.

### Выводы

1. Относительное движение КА в заключительной фазе сближения и стыковки, описываемое в визирной СК, может быть представлено имитационной моделью плоского движения материальной точки в абсолютной системе координат наземного двухступенного испытательного стенда. При этом начало координат визирной СК, размещенной в точке визирования ПА, соответствует точке на оси вращения стенда, а центр масс АА – точке размещения акселерометров на радиально перемещаемой платформе стенда.

2. Определяющим критерием подобия имитационного моделирования в наземных условиях является геометрический критерий, представляющий собой отношение текущих значений радиуса перемещения некоторой материальной точки вдоль несущей конструкции стенда, и дистанции между КА по линии визирования. Этот параметр в общем случае является нестационарным, т.е. по мере сближения двух КА его целесообразно увеличивать с целью снижения относительных погрешностей имитационного моделирования.

3. Для соблюдения подобия имитационной модели и природы необходимо подобие симплексный геометрический критерий подобия ко всем линейным фазовым переменным, входящим в критериальное уравнение (дистанции, линейной скорости и ускорению). Ко всем угловым координатам необходимо применять единичный индикатор подобия, т.е. угловые переменные (скорость вращения и угловое ускорение), связанные со стендом, должны быть равны угловым скорости и ускорению ЛВ КА.

### Список литературы

1. Алабужев П.М., Геронимус В.Б., Минкевич О.М. Теория подобия и размерностей. Моделирование. – М.: Высш. шк., 1968. – 206 с.
2. Балахонцев В.Г., Иванов В.А., Шабанов В.И. Сближение в космосе. – М.: Воениздат, 1973. – 367 с.
3. Веников В.А., Веников Г.А. Теория подобия и моделирования. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 439 с.
4. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов: учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2004. – 540 с.

5. Казанцев В.П. Автоматизация испытаний изделий авиационной и ракетной техники на воздействие перегрузок. – Пермь: Институт механики сплошных сред УрО РАН, 2000. – 100 с.

6. Казанцев В.П., Москоков А.Ю. К вопросу автоматизации испытаний изделий авиакосмической техники на ротационных стендах // Вестник ИжГТУ. – 2010. – № 3. – С. 11–15.

7. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

8. Ручинская Е.В. Математическое моделирование управляемого движения космических аппаратов: дис. ... канд. техн. наук. – М., 2010. – 175 с.

9. Самсонов Л.М. Ротационные методы испытаний приборных устройств. – М.: Машиностроение, 1981. – 133 с.

10. Создание и развитие систем управления движением транспортных космических кораблей «Союз» и «Прогресс»: опыт эксплуатации, планируемая модернизация // Труды МФТИ. – М., 2009. – Т. 1, № 3. – С. 4–13.

### References

1. Alabuzhev P.M., Geronimus V.B., Minkevich O.M. *Teoriya podobiya i razmernostey. Modelirovanie* [Theory of similarity and dimensional. Modeling]. Moscow, Top. NIS, 1968. 206 p.

2. Balakhontsev V.G., Ivanov V.A., Shabanov V.I. *Sblizhenie v kosmose* [Convergence in space]. Moscow, Voenizdat, 1973, 367 p.

3. Venikov V.A., Venikov G.A. *Teoriya podobiya i modelirovaniya. Izdanie 3, pererab. i dop.* [Theory of similarity and modelling. Edition no. 3, revised and amended]. Moscow, Top. NIS, 1984. 439 p.

4. Ivanov N.M., Lysenko L.N. *Ballistika i navigatsiya kosmicheskikh apparatov. Uchebnik dlya vuzov* [Ballistics and

space vehicle navigation. Textbook for high schools]. Moscow, Bustard, 2004. 540 с.

5. Kazantsev V.P. *Avtomatizatsiya ispytaniy izdeliy aviatsionnoy i raketnoy tekhniki na vozdeistvie peregruzok* [Test impact loads automation of aircraft and rocket devices]. Perm, Institute of continuous media mechanics UB RAS, 2000. 100 p.

6. Kazantsev V.P., Moskokov A.Yu. *Vestnik of Izhevsk State Technical University*. 2010, no. 3, pp. 11–15.

7. Levantovskiy V.I. *Mekhanika kosmicheskogo poleta v elementarnom izlozhenii* [Mechanics of space flight in an elementary manner]. Moscow, Nauka, 1980. 512 p.

8. Ruchinskaya E.V. Dics. Cand. Tech. Science. Moscow, Russian State Technological University, 2010. 175 p.

9. Samsonov L.M., Kalyaev A.K., Markov A.V. *Rotatsionnye metody ispytaniy pribornykh ustroystv* [Rotary test methods of instrument devices]. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 133 p.

10. Legostaev V.P., Mikrin E.A., Orlovskiy I.V., Borisenko YU.N., Platonov V.N., Evdokimov S.N. The Works of MIPT, Moscow, 2009, Vol. 1, no. 3, pp. 4–13.

### Рецензенты:

Бочкарев С.В., д.т.н., доцент, профессор кафедры микропроцессорных средств автоматизации, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь;

Цаплин А.И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой общей физики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь.

Работа поступила в редакцию 11.04.2014.