УДК 517.95

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ, СГЛАЖИВАЮЩЕЙСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

[1]Будылина Е.А., [1]Мурачев Е.Г., [2]Гарькина И.А., [2]Данилов А.М.

[1]Московский государственный университет машиностроения, Москва, e-mail: bud-ea@yandex.ru;
[2]ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, e-mail: regas@pguas.ru

Исследуются решения уравнения Клейна – Гордона типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности. Актуальность исследований связана с разработкой различных приближенных моделей для изучения акустических свойств жидкостей с пузырьками газа (в том числе исследование волн конечной амплитуды в смесях с крупными пузырьками газа); ряда математических моделей, описывающих нелинейные сейсмические эффекты в геофизических средах (в том числе уравнение синус-Гордона и его модификации) и др. Рассматриваются существенные при моделировании сложных систем различной природы вопросы существования решения уравнения Клейна – Гордона типа уединенной волны, сглаживающейся на бесконечности, для задачи Коши. Доказана теорема об условиях существования такого решения. Предварительно сформулированы и доказаны необходимые леммы. Изучены типы особых точек. Приведены фазовые портреты.

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона, решения типа бегущей волны, поведение в бесконечности, приложения

SOLUTIONS OF THE KLEIN-GORDON EQUATION OF TRAVELING WAVE TYPE, WHICH SMOOTHED AT INFINITY

[1]Budylina E.A., [1]Murachev E.G., [2]Garkina I.A., [2]Danilov A.M.

[1]Moscow state university of mechanical engineering, Moscow, e-mail: bud-ea@yandex.ru;
[2]Penza state university of architecture and construction, Penza, e-mail:regas@pguas.ru

Solutions of Klein-Gordon equation of traveling wave is smoothed at infinity. Relevance of research associated with the development of various approximate models for studying the acoustic properties of liquids with gas bubbles (including the study of finite amplitude waves in mixtures with large gas bubbles); a number of mathematical models describing nonlinear effects in geophysical seismic environments (including sine-Gordon equation and its modifications), etc. Considered essential in the modeling of complex systems of different nature the existence of solutions of the Klein-Gordon equation of solitary wave is smoothed at infinity (for the Cauchy problem). We prove a theorem on the existence of such a decision. Pre-formulated and proved necessary lemmas. Studied types of singular points. Shows the phase portraits.

Keywords: Klein-Gordon equation, traveling-wave solutions, the behavior at infinity, applications

В настоящее время наблюдается большой интерес к проблеме распространения волн в газожидкостных системах (гидродинамические процессы современной технологии и энергетики, ультразвуковые технологии); реальная жидкость рассматривается двухфазной средой с начальными параметрами газосодержания, соответствующими экспериментальным данным. При описании движения газожидкостной смеси используются различные приближенные модели, в том числе уравнение Клейна – Гордона [1, 4]. На основе этих моделей проводится изучение акустических свойств жидкостей с пузырьками газа, исследуются волны с конечной амплитудой в смесях с крупными пузырьками. Описываются взрывные неустойчивости поверхностей жидкого металла во внешнем электрическом поле и диэлектрической жидкости, а также тангенциальный разрыв по механизму Кельвина – Гельмгольца и др. Уравнение синус-Гордона и его модификации применяются и при описании нелинейных сейсмических эффектов в геофизических средах наряду с известными математическими моделями (канонические нелинейные уравнения Бусинеска, Бургерса, Кортевега де Фриза, Шредингера). Здесь диссипация и дисперсия (основные характеристики геофизической среды и волновых процессов, протекающих в ее пределах) рассматриваются как существенные нелинейности.

Ниже исследуется решение одной конкретной модификации уравнения Клейна – Гордона и обсуждаются возможности обобщений полученных результатов (частично рассматривались в [1…5]). Особое внимание уделяется решению типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности (решение вида $\varphi(x, t) = g(x - v \cdot t)$, отличное от константы, у которого $g(\xi)$ стремятся к константам при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$, и у которого $g'(\xi)$ стремятся к нулю при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$).

Предварительно рассмотрим уравнение Клейна – Гордона:

$$\varphi_{xx}(x, t) - \varphi_{tt}(x, t) = f(\varphi(x, t)). \qquad (1)$$

Сделаем замену $\varphi(x, t) = g(\xi)$, где $\xi = x - v\cdot t$. При $v \neq \pm 1$ уравнение (1) эквивалентно

$$g''(\xi) = \frac{1}{1-v^2} f\left(g(\xi)\right).$$

Умножая на $g'(\xi)$, после интегрирования получим:

$$\left(g'(\xi)\right)^2 = \frac{2}{1-v^2}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(g(s)\right)g'(s)\,ds + \frac{\operatorname{sign}\left(1-v^2\right)}{1-v^2}C^2;$$

$$C = g'\left(\xi_0\right)\sqrt{\left|1-v^2\right|},$$

где ξ_0 – произвольная точка того промежутка, где определена $g(\xi)$.

По определению классического решения дифференциального уравнения второго порядка функция $g(\xi)$ должна иметь второй порядок гладкости. Если $f(\zeta)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то к интегралу в правой части можно применить теорему о замене переменной в определенном интеграле:

$$\left(g'(\xi)\right)^2 = \frac{1}{\left|1-v^2\right|}\left(2\operatorname{sign}\left(1-v^2\right)\cdot\int\limits_{g_0}^{g} f(\zeta)\,d\zeta + C^2\right);\quad g_0 = g(\xi_0). \tag{2}$$

Пусть $\left(\widehat{g}_1;\ \widehat{g}_2\right)$ – промежуток строгой монотонности функции $g(\xi)$ и пусть $g_0 \in \left(\widehat{g}_1;\ \widehat{g}_2\right)$; правая часть (2) – положительна и можно к (2) применить теорему об обратной функции:

$$\left(\xi'(g)\right)^2 = \frac{\left|1-v^2\right|}{2\operatorname{sign}\left(1-v^2\right)\cdot\int\limits_{g_0}^{g} f(\zeta)\,d\zeta + C^2}.$$

Таким образом, чтобы решение $\varphi(x, t)$ было бегущей волной, сглаживающейся на бесконечности, необходимо и достаточно расходимости интеграла

$$\int\limits_{g_0}^{g}\frac{\sqrt{\left|1-v^2\right|}}{\sqrt{2\operatorname{sign}\left(1-v^2\right)\cdot\int\limits_{g_0}^{g} f(\zeta)\,d\zeta + C^2}}\,dv.$$

при

$$g \to \widehat{g}_1 \text{ и при } g \to \widehat{g}_2.$$

Воспользуемся приведенным методом для исследования одной модификации уравнения синус-Гордона (частный случай уравнения Клейна – Гордона):

$$\varphi_{xx}(x, t) - \varphi_{tt}(x, t) = \sin(\varphi(x, t)) + \sin(2l\cdot\varphi(x, t)),\ l \geq 2. \tag{3}$$

Будем искать решение в виде $\varphi(x, t) = g(\xi)$, где $\xi = x - v\cdot t$. Тогда:

$$(1 - v^2)\cdot g''(\xi) = \sin(g(\xi)) + \sin(2l\cdot g(\xi)),\ l \geq 2. \tag{4}$$

В случае $v = \pm 1$ получим, что $0 = \operatorname{in}(g(\xi)) + \sin(2l\cdot g(\xi))$ или $g(\xi) = \frac{2\pi n}{2l+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $g(\xi) = \frac{\pi + 2\pi m}{2l-1}$, $m \in \mathbb{Z}$. Решение – константа, что противоречит определению бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности.

При $v \neq \pm 1$ уравнение (4) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} g'(\xi) = p(\xi); \\ p'(\xi) = \dfrac{1}{1-v^2}\left(\sin\left(g(\xi)\right) + \sin\left(2l\cdot g(\xi)\right)\right). \end{cases} \tag{5}$$

Теорема. При $v \neq \pm 1$ у уравнения (3) существуют решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности.

При $v \neq \pm 1$ решения уравнения (3) будут типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, если $g'(\xi)$ будет стремиться к нулю и при $\xi \to +\infty$, и при $\xi \to -\infty$.

Для доказательства изучим положения равновесия системы (4). Поскольку правые части этой системы периодически зависят от g, то ее особые точки делятся на несколько видов в зависимости от значения g:

1. $g_1(\xi)=\dfrac{2\pi n}{2l+1}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. $g_2(\xi)=\dfrac{\pi+2\pi m}{2l-1}$, $m\in\mathbb{Z}$.

В первом случае имеем:

$$\sin(g)+\sin(2lg)=(g-g_1)\cdot\cos(g_1)\cdot(2l+1)+\bar{o}(g-g_1)$$

($\cos(g_1)=0$ только при

$$l\not\equiv 3(\text{mod}4) \text{ и } n=\frac{l+1}{4}(2k+1),$$

$k\in\mathbb{Z}$; здесь и далее предполагается, что $l\not\equiv 3(\text{mod}4)$).

Систему (5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} g'(\xi)=p(\xi); \\ p'(\xi)=\dfrac{1}{1-v^2}\big((g-g_1)\cdot\cos(g_1)\cdot(2l+1)+\bar{o}(g-g_1)\big). \end{cases}$$

Собственные значения λ определятся из уравнения:

$$\lambda^2-\frac{\cos(g_1)\cdot(2l+1)}{1-v^2}=0. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что в зависимости от λ особая точка может быть разных типов:

– седло при $0\le|v|<1$ (уравнение (6) имеет два корня разных знаков);

– центр при $|v|>1$.

Из теоремы о положении равновесия по первому приближению известно, что если собственные значения чисто мнимые, то первое приближение может не давать ответа на вопрос о типе особой точки. В рассматриваемом случае будут центры (замкнутые траектории, гомотопные окружностям, охватывают особую точку).

Исследуем исходную нелинейную систему (5). Умножив первое уравнение системы на $\dfrac{1}{1-v^2}\big(\sin(g(\xi))+\sin(2l\cdot g(\xi))\big)$, а второе – на $p(\xi)$, на фазовой плоскости получим семейство линий:

$$\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{1-v^2}\left(\cos(g-g_1)+\frac{1}{2l}\cos\big(2l(g-g_1)\big)\right)=\tilde{C};$$

$$|x|<\sqrt{\frac{6(2l+1)^2\,\varepsilon}{(8l^3+1)(v^2-1)}} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2+x^2\ge C; \\ y^2+(1-\varepsilon)x^2\le C. \end{cases}$$

Расстояние между границами этих областей (внешность окружности и внутренность эллипса)

$$\alpha=\sqrt{\frac{C}{1-\varepsilon}}-\sqrt{\frac{C}{1+\varepsilon}}=\sqrt{C}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}}-\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right).$$

При $\varepsilon\le 0{,}5$ справедливо $\alpha\le\sqrt{2C}\le\sqrt{\dfrac{12(2l+1)^2\,\varepsilon(1-\varepsilon)}{(8l^3+1)(v^2-1)}}$.

Справедливы утверждения (лемма): если выполнены условия:

1. $y^2+x^2-C=\dfrac{v^2-1}{6}\cdot\dfrac{\cos(\theta_1)+8l^3\cdot\cos(2l\theta_2)}{(2l+1)^2}x^4$.

2. $0\le|\theta_1|\le|x|$; $\quad 0\le|\theta_2|\le|x|$.

3. $|x|<\sqrt{\dfrac{6(2l+1)^2\,\varepsilon}{(8l^3+1)(v^2-1)}}$; $\quad |x|<\dfrac{\pi}{3(2l-1)}$.

4. $0<C<\dfrac{6(2l+1)^2\,\varepsilon(1-\varepsilon)}{(8l^3+1)(v^2-1)}$.

5. $l\not\equiv 3(\text{mod}4)$,

то множество точек (x, y) заключено между окружностью (внутренняя граница)

$$y^2 + x^2 - C \geq 0$$

и эллипсом (внешняя граница)

$$y^2 + (1 - \varepsilon)\cdot x^2 - C \leq 0.$$

Рассмотрим особые точки, в окрестности которых:

$$\sin(g) + \sin(2lg) = 2\sin(g_2) - (g - g_2)\cdot\cos(g_2)\cdot(2l-1) + \bar{o}(g - g_2).$$

Здесь точки распадаются на два подсемейства:

a) $\sin(g_2) = 0 \Leftrightarrow m = (2k-1)l - k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$g_2 = \frac{\pi + 2\pi((2k-1)l - k)}{2l-1} = \frac{\pi + 2\pi((2l-1)k - l)}{2l-1} =$$

$$= \frac{\pi - 2\pi l}{2l-1} + 2\pi k = -\pi + 2\pi k;$$

b) $\sin(g_2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq (2k-1)l - k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

В случае a) систему (5) можно представить в виде

$$\begin{cases} g'(\xi) = p(\xi); \\ p'(\xi) = \dfrac{1}{1-v^2}\big((g - g_2)\cdot(2l-1) + \bar{o}(g - g_2)\big). \end{cases}$$

Собственные значения λ определяются из уравнения:

$$\lambda^2 - \frac{2l-1}{1-v^2} = 0. \qquad (7)$$

При $0 \leq |v| < 1$ (уравнение (7) имеет два корня разных знаков) особая точка есть седло; центр – при $|v| > 1$ (уравнение (7) имеет два чисто мнимых корня).

В случае *b*) систему (5) можно представить в виде:

$$\begin{cases} g'(\xi) = p(\xi); \\ p'(\xi) = \dfrac{1}{1-v^2}\Big(K_1\cos(g_2) + \big(\cos(g - g_2) + \cos(2l(g - g_2))\big)\cdot\sin(g_2)\Big); \end{cases}$$

$$K_1 = \sin(g - g_2) - \sin(2l(g - g_2)).$$

Фазовые портреты системы (5) представлены на рис. 1, 2.

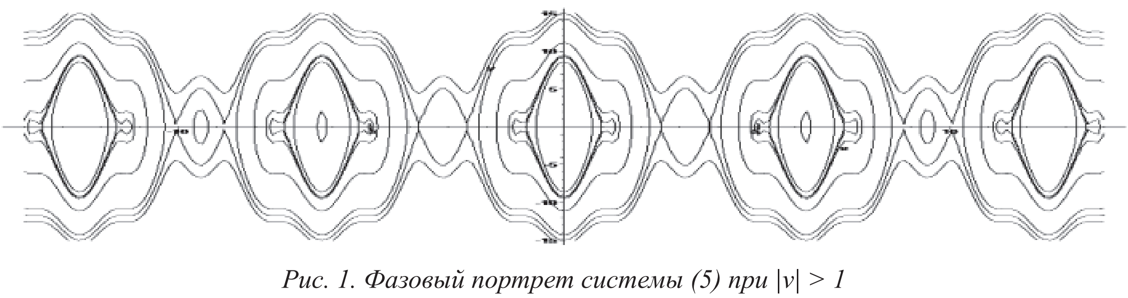

Рис. 1. Фазовый портрет системы (5) при $|v| > 1$

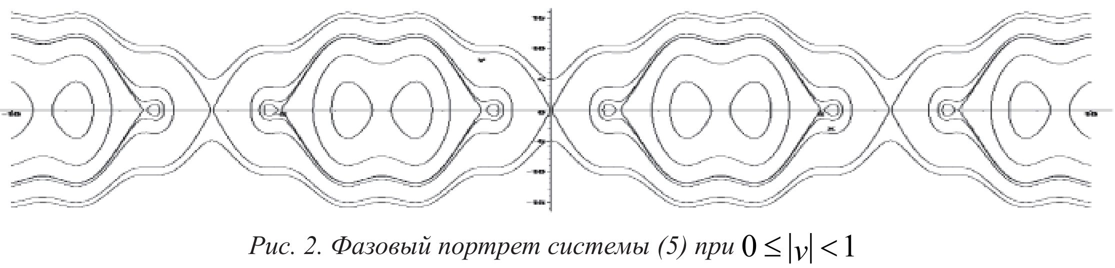

Рис. 2. Фазовый портрет системы (5) при $0 \leq |v| < 1$

Лемма. Если фазовая траектория пересекает ось абсцисс не в особой точке, то она проходит цикл полностью на конечном промежутке изменения параметра.

Действительно, умножив уравнение (4) на g', проинтегрировав полученное равенство и перейдя к обратной функции $\xi = \xi(g)$, получим:

$$\xi = \int_{\bar{g}}^{g} \sqrt{\frac{1-v^2}{2\left(\widehat{C} - \cos(g) - \frac{1}{2l}\cos(2lg)\right)}}\,dg. \qquad (8)$$

Для доказательства леммы необходимо показать, что в точках g_0, где знаменатель обращается в нуль, интеграл сходится. Следует отметить, что это именно те точки, где фазовые линии пересекают ось абсцисс. Разложим знаменатель в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки g_0:

$$\widehat{C} - \cos(g) - \frac{1}{2l}\cos(2lg) = \left(\sin(g_0) + \sin(2lg_0)\right)(g - g_0) + \bar{o}(g - g_0).$$

Заметим, что $\sin(g_0) + \sin(2lg_0) \neq 0$, так как g_0 не является особой точкой. По признаку сравнения интеграл (8) будет сходиться – значение ξ конечно. Лемма доказана.

Замечание. В случае, когда g_0 – особая точка, интеграл (8) будет расходиться – значение ξ бесконечно.

Имеем:

$$\widehat{C} - \cos(g) - \frac{1}{2l}\cos(2lg) = \frac{1}{2}\left(\cos(g_0) + 2l\cos(2lg_0)\right)(g - g_0)^2 -$$

$$-\frac{1}{6}\left(\sin(g_0) + 4l^2\sin(2lg_0)\right)(g - g_0)^3 - \frac{1}{24}\left(\cos(g_0) + 8l^3\cos(2lg_0)\right)(g - g_0)^4 +$$

$$+\underline{o}\left((g - g_0)^4\right).$$

По признаку сравнения интеграл расходится (непосредственной подстановкой можно убедиться, что коэффициент либо при 2 степени, либо при 3 степени отличен от нуля).

Можно показать, что фазовые траектории системы (5) имеют вид, приводимый на рис. 3, 4. Умножив первое уравнение системы на $\frac{1}{1-v^2}\cdot\left(\sin(g(\xi)) + \sin(2l\cdot g(\xi))\right)$, а второе – на $p(\xi)$, получим на фазовой плоскости семейство линий:

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{1-v^2}\left(C - \cos(g) - \frac{1}{2l}\cos(2lg)\right).$$

При $|v| < 1$ (множество особых значений постоянной C – это

$$EC = \left\{\cos(g_1) + \frac{1}{2l}\cos(2lg_1),\ \cos(g_2) + \frac{1}{2l}\cos(2lg_2)\right\}$$

возможны случаи (рис. 3):

1. $C > \max_{c_0 \in EC} c_0$, тогда $p^2 > 0$, а значит, $g'(\xi) \neq 0$ при любом ξ.

2. $C \in EC$, тогда $p^2 \geq 0$ при любом ξ. Причем $p^2 = 0$ тогда и только тогда, когда рассматриваемая траектория пересекает ось абсцисс в особых точках первого вида.

3. $C < \min_{c_0 \in EC} c_0$, тогда $p^2 < 0$, а значит, решений не существует.

4. Иначе траектории пересекают ось абсцисс в точке, которая не совпадает с особыми точками, а значит, к этому случаю применима лемма.

Итак, решение типа волны, сглаживающейся на бесконечности, существует.

При $|v| > 1$ (множество особых значений постоянной С – это

$$EC = \left\{\cos(g_1) + \frac{1}{2l}\cos(2lg_1),\ \cos(g_2) + \frac{1}{2l}\cos(2lg_2)\right\}$$

возможны случаи (рис. 4):

1. $C > \max_{c_0 \in EC} c_0$, тогда $p^2 > 0$, а значит, $g'(\xi) \neq 0$ при любом ξ.

2. $C \in EC$, тогда $p^2 \geq 0$ при любом ξ. Причем $p^2 = 0$ тогда и только тогда, когда рассматриваемая траектория пересекает ось абсцисс в особых точках первого вида.

3. $C < \min_{c_0 \in EC} c_0$, тогда $p^2 < 0$, а значит, решений не существует.

4. Иначе траектории пересекают ось абсцисс в точке, которая не совпадает с особыми точками, а значит, к этому случаю применима лемма.

Итак, решение типа волны, сглаживающейся на бесконечности, существует.

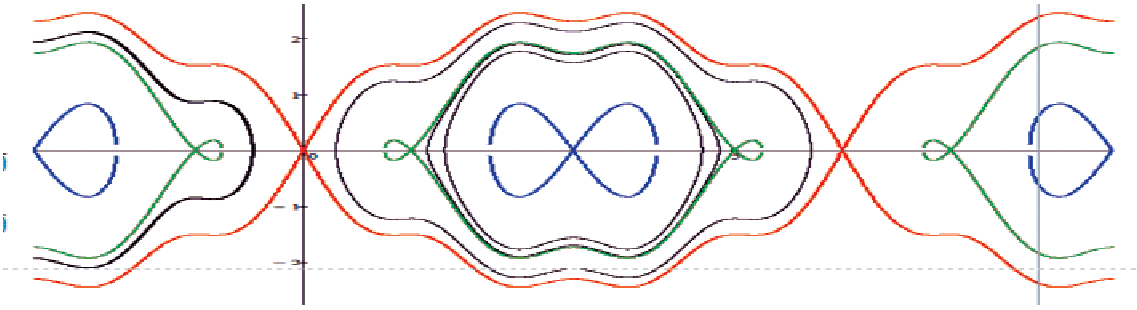

Рис. 3. Фазовый портрет системы(5) при $0 \le |v| < 1$ *(траектории уединенных волн отмечены красным, зеленым и синим)*

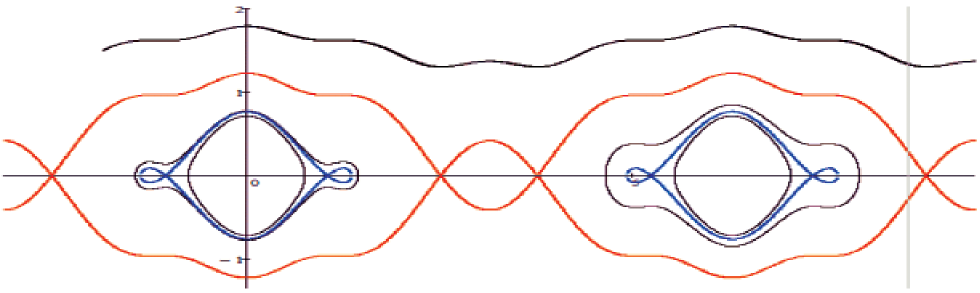

Рис. 4. Фазовый портрет системы (5) при $|v| > 1$ *(траектории уединенных волн отмечены красным и синим)*

Теорема доказана.

Заключение

Доказано, что уравнение (3) в случае $l \not\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ имеет решения типа уединенной волны; приведены формулы для этих решений. Результаты исследований легко обобщить на случай уравнения Клейна – Гордона с произвольной правой частью; могут быть использованы при изучении эффекта Джозефсона и решения других задач, приводящих к уравнению Клейна – Гордона и их модификациям (для исследования нелинейных сейсмических эффектов и процессов, в технологиях связи, в волновой генетике).

Список литературы

1. Будылина Е.А. Исследование существования и анализ решения задачи Коши для возмущенного уравнения Клейна-Гордона / Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2013. – № 3 (27). – С. 25 – 31.

2. Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М. Моделирование с позиций управления в технических системах / Региональная архитектура и строительство. – 2013. – № 2 (16). – С. 138-142.

3. Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М. Декомпозиция динамических систем в приложениях / Региональная архитектура и строительство.– 2013. – № 3(17). – С. 95–100.

4. Данилова Е.А. Об отсутствии решений солитонного типа для одной модификации уравнения синус-Гордона / Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2011. – № 3 (19). – С. 32 – 36.

5. Данилов А.М., Гарькина И.А. Сложные системы: идентификация, синтез, управление: монография. – Пенза: ПГУАС, 2011. – 308 с.

References

1. Budylina E.A. Issledovanie sushhestvovaniya i analiz resheniya zadachi Koshi dlya vozmushhennogo uravneniya Klejna-Gordona / Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Povolzhskij region. 2013. no. 3 (27). pp. 25–31.

2. Budylina E.A., Gar’kina I.A., Danilov A.M. Modelirovanie s pozitsij upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh / Regional’naya arkhitektura i stroitel’stvo. 2013. no. 2 (16). pp. 138–142.

3. Budylina E.A., Gar’kina I.A., Danilov A.M. Dekompozitsiya dinamicheskikh sistem v prilozheniyakh / Regional’naya arkhitektura i stroitel’stvo. 2013. no. 3(17). pp. 95–100.

4. Danilova E.A. Ob otsutstvii reshenij solitonnogo tipa dlya odnoj modifikatsii uravneniya sinus-Gordona. // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Povolzhskij region. 2011. no. 3 (19). pp. 32–36.

5. Danilov A.M., Gar’kina I.A. Slozhnye sistemy: identifikatsiya, sintez, upravlenie: monografiya. Penza: PGUAS, 2011. 308 p.

Рецензенты:

Голованов О.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин Пензенского артиллерийского инженерного института, г. Пенза;

Камбург В.Г., д.т.н., профессор кафедры информационно-вычислительных систем Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, г. Пенза.

Работа поступила в редакцию 26.03.2014.