

УДК 338.249.59.687

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ СВЯЗЕЙ И ЗАВИСИМОСТЕЙ В ЭКОНОМИКЕ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИИ

Адамадзиев К.Р., Адамадзиева А.К.

ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет»,
Махачкала, e-mail: adamadziev@mail.ru

Предметом исследования являются связи и зависимости между социально-экономическими показателями регионов. Сформулирована задача, в соответствии с которой требуется выявить зависимость ВРП от численности занятых в экономике и стоимости основных фондов, и построены уравнения регрессии в виде полинома второго порядка, апробированные по данным 27 малых регионов России по величине ВРП за 2010 г. Описаны два разных способа определения параметров и статистических характеристик многофакторных полиномиальных уравнений регрессии с помощью различных функций, процедур и средств MS Excel. Дана авторская методика расчета параметров и характеристик двухфакторных моделей регрессии полиномиального вида и оценка результатов. Разработана и описана компьютерная модель, позволяющая автоматизировать все необходимые расчеты и процедуры обработки информации и строить как полные, так и неполные варианты полиномиальных уравнений регрессии. Дана сравнительная оценка различных вариантов двухфакторных полиномов второго порядка, построенных по данным малых регионов с помощью ключевых статистических характеристик, и определены наиболее значимые из уравнений.

Ключевые слова: методика, зависимости, экономика, таблица-шаблон, модель, полином, регрессия, параметры, статистические характеристики

METHOD OF EVALUATING LINKAGES AND RATIOS IN THE ECONOMY BY POLYNOMIAL REGRESSION MODELS

Adamadziev K.R., Adamadzieva A.K.

Dagestan State University, Makhachkala, e-mail: adamadziev@mail.ru

Subject of research are the communications(connection) and dependences between socio economic parameters of regions. The task is formulated, according to which it is required to reveal dependence BPII from number engaged in economy and cost of a fixed capital and the equations of regress as полинома of the second order, апробированные on the data 27 small regions of Russia on size BPII for 2010 are constructed. Two different ways of definition of parameters and statistical characteristics многофакторных полиномиальных of the equations of regress with the help of various functions, procedures and means MS Excel are described. The author's technique of account of parameters and characteristics двухфакторных of models of regress полиномиального of a kind and rating of results is given. Is developed and the computer model allowing to automate all necessary accounts and procedure of processing the information and to build as complete, and incomplete variants полиномиальных of the equations of regress is described. The comparative rating of various variants двухфакторных полиномов of the second order constructed on the data of small regions with the help of the key statistical characteristics is given and are determined most значимые from the equations.

Keywords: method, ratio, economy, pattern-table, model, polynomial, regression, parameters, statistical characteristics

Важнейшими функциями, выполняемыми на любых экономических объектах, являются аналитические функции, которые, как правило, выполняются работниками среднего и высшего уровня управления. При проведении анализа часто возникает необходимость в проведении множества расчётов и процедур обработки информации. Для автоматизации расчётов и процедур обработки информации в настоящее время разработаны и применяются так называемые VI-системы (аналитические системы подготовки принятия решений).

К числу наиболее значимых задач для VI-систем можно отнести задачи, в которых требуется количественно выразить и оценить связи и зависимости между различными экономическими показателями и тенденции их изменения.

Особенность таких задач состоит в том, что связи, зависимости и тенденции носят неопределённый, вероятностный харак-

тер для любого из выбранных совокупностей и поэтому не могут быть однозначно определены. Во-первых, зависимость даже между одними и теми же показателями для одной и той же совокупности может быть описана разными видами уравнений регрессии (как линейными, так и нелинейными); во-вторых, удаление любого из объектов совокупности или добавление нового объекта в состав исследуемой совокупности может изменить степень тесноты связи и её характеристики.

Содержание

Связи и зависимости между экономическими показателями могут быть описаны одно- и многофакторными моделями регрессии. Особое место среди видов моделей регрессии занимают модели, описываемые полиномами второго порядка. Уже однофакторная модель такого вида, записываемая в виде уравнения параболы, отличается

от остальных однофакторных тем, что, во-первых, она содержит три параметра (а не два, как, например, линейное, показательное и степенное); во-вторых, на ее основе можно определить величину показателя-фактора, при котором результативный показатель принимает максимальное (или минимальное) значение.

$$y_{\max} = b + m_1 \left(-\frac{m_1}{2m_2} \right) + m_2 \left(-\frac{m_1}{2m_2} \right)^2 = \frac{4bm_2 - m_1^2}{4m_2}.$$

Т.о., точка max (min) – это вершина параболы, координаты которой равны $\left(-\frac{m_1}{2m_2}, \frac{4bm_2 - m_1^2}{4m_2} \right)$.

Двухфакторная полиномиальная модель регрессии параболического вида в общем случае представляет собой уравнение, которое имеет следующую математическую запись:

$$y = b + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_1^2 + m_4x_2^2 + m_5x_1x_2. (1)$$

Методика расчёта параметров этого уравнения аналогична методике построения пятифакторного уравнения линейного вида:

$$y = b + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5. (2)$$

Параметры уравнения (1) можно рассчитать методом наименьших квадратов, в соответствии с которым требуется составить и решить систему нормальных уравнений [4, 6].

Поскольку с помощью уравнений регрессии выявляются и оцениваются приближенные траектории связей и зависимо-

Так, если однофакторное уравнение параболы записать в виде

$$y = b + m_1x + m_2x^2,$$

то при $x = -\frac{m_1}{2m_2}$ y принимает max или min.

При этом сама величина y_{\max} (y_{\min}) равна

стей, называемые корреляционными, то для обоснования их адекватности и возможности практического применения принято рассчитывать статистические характеристики.

На основе учебной литературы по эконометрике [2, 4, 6] нами разработан модельный инструментарий, включающий комплекс из 20 формул.

Особенности построения двухфакторных уравнений параболического вида (см. формулу (1)) и методика оценки связей и зависимостей с их помощью рассмотрим на конкретном практическом примере.

Пусть требуется построить двухфакторное уравнение регрессии для зависимости ВРП (y , млрд руб.) от численности занятых в экономике (x_1 , тыс. чел.) и стоимости основных фондов (x_2 , млрд руб.) для 27 малых регионов России по величине ВРП за 2010 г.

Для формирования выборки из 27 малых регионов достаточно создать в MS Excel таблицу с тремя рассматриваемыми показателями для всех регионов России [5], расположить регионы в порядке возрастания величины ВРП, а затем выбрать требуемые 27 регионов (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные по 27 малым регионам России за 2010 г. (фрагмент)

	2010	ВРП, млрд руб.	Число, тыс. чел.	ОФ, млрд руб.
		Y	X_1	X_2
1	Республика Ингушетия	18,7	65,5	41
2	Республика Алтай	19,9	94,9	45
...
27	Астраханская область	132,2	446,3	530
	Сумма	1994,9	7399,7	5987

Чтобы рассчитать параметры уравнения с помощью системы нормальных уравнений требуется создать таблицу-шаблон (табл. 2) с исходными данными, предусматривающую выполнение всех необходимых промежуточных расчётов.

В строке «сумма» таблицы-шаблона 2 содержатся все величины ($\sum y$, $\sum x_1$,

$\sum x_2$, ..., $\sum (x_1x_2)^2$, $\sum x_1x_2y$), необходимые для расчета параметров уравнений путем построения и решения системы нормальных уравнений.

Для выполнения промежуточных расчётов по таблице-шаблону (табл. 2) требуется:

а) ввести исходные значения y , x_1 , x_2 , в столбцы 2, 3 и 4;

б) в ячейки первой строки столбцов 6,7,...22 ввести с клавиатуры формулы: « $=x_1^2$ », « $=x_2^2$ », « $=x_1x_2$,...», ..., « $=x_1x_2y$ » (см. выражения в столбцах табл. 2);

в) копировать формулы, введенные в ячейки первой строки, в ячейки всех остальных строк (кроме строки «сумма»);

г) в ячейку 2-го столбца строки «сумма» ввести формулу «=сумм» и скопировать её в остальные ячейки этой строки.

Подставив суммы из табл. 2 в систему нормальных уравнений, получим численную модель этой системы, содержащую шесть уравнений и шесть переменных, параметры которых можно рассчитать в MS Excel двумя способами:

а) с помощью процедуры «Поиск решения...»;

б) с помощью встроенной статистической функции «ЛИНЕЙН».

Таблица 2

Фрагмент таблицы-шаблона для расчета суммарных, средних и других промежуточных величин, необходимых для расчета параметров и статистических характеристик 2-факторных уравнений регрессии параболического вида

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x^3
1	2	3	4	5	6	7	8
1	18,7	65,5	41	4290	1681	2686	281011
...
27	132,2	446,3	530	199184	280900	236539	88895681
Сумма	1994,9	7399,7	5987	2607600,97	1794703	2094928	1039745842

Продолжение табл. 2

$x_1x_2^2$	$x_1^2x_2$	yx_1	x_2^3	yx_2	x_1^4	$x_1^2x_2^2$
9	10	11	12	13	14	15
185087346	175900	1225	68921	767	18406245	7211910
...
3,522E + 13	1,056E + 08	5,900E + 04	1,489E + 08	7,007E + 04	3,967E + 10	5,595E + 10
1,065E + 14	8,304E + 08	6,682E + 05	6,338E + 08	5,584E + 05	4,469E + 11	2,967E + 11

Окончание табл. 2

$x_1^3x_2$	yx_1^2	x_2^4	$x_1x_2^3$	yx_2^2	yx_1x_2
16	17	18	19	20	21
11521466	80228	2825761	4514326	31435	50219
...
4,711E + 10	2,633E + 07	7,890E + 10	6,644E + 10	3,713E + 07	3,127E + 07
3,531E + 11	2,592E + 08	2,476E + 11	2,642E + 11	1,883E + 08	2,145E + 08

Рассмотрим методику расчета параметров каждым способом. При применении первого способа создается пустая таблица-шаблон вида табл. 3 и в ее ячейки вводятся численные значения необходимых сумм из таблицы-шаблона 2. Ввод данных можно выполнить с клавиатуры, но лучше с помощью операторов присвоения, связывающих ячейки строки «сумма» и ячейки таблицы-шаблона 3. Это позволяет впоследствии автоматизировать все расчетные операции и процедуры обработки информации с помощью единой компьютерной модели.

При применении первого способа параметры уравнения выводятся в строку «решение» созданной таблицы-шаблона (табл. 3).

Методика расчета параметров с помощью процедуры «Поиск решения...» включает следующую последовательность действий:

– в рабочем окне MS Excel создается исходная таблица (которую принято называть расширенной моделью или числовой моделью решаемой задачи) в виде вышеприведенной табл. 3;

– в первую ячейку столбца «Расчетные выражения» вводится расчетное выражение, позволяющее перемножить элементы 1-й строки на элементы строки «решение» (используя встроенную математическую функцию «СУММПРОИЗВ» из MS Excel);

– аналогичные расчетные выражения вводятся (копируются) во все строки

столбца «Расчетные выражения», включая строку «целевая функция»;

– установив курсор на ячейку на пересечении строки «целевая функция» и столбца «расчетные выражения», запускается процедура «Поиск решения...» и в появив-

шемся окне выполняются предусмотренные действия: выбор целевой ячейки; указание адресов ячеек, в которые выводится решение; ввод ограничений; нажатие кнопки «выполнить»; (после вывода сообщения «задача решена») нажатие клавиши «ОК».

Таблица 3

Таблица-шаблон для расчёта параметров двухфакторных уравнений регрессии параболического вида с помощью процедуры «Поиск решений...»

	b	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	Расчётные выражения	Величины ограничений
1.	n	$\sum x_1$	$\sum x_2$	$\sum x_1^2$	$\sum x_2^2$	$\sum x_1 x_2$		$\sum y$
2.	$\sum x_1$	$\sum x_1^2$	$\sum x_1 x_2$	$\sum x_1^3$	$\sum x_1 x_2^2$	$\sum x_1^2 x_2$		$\sum x_1 y$
3.	$\sum x_2$	$\sum x_1 x_2$	$\sum x_2^2$	$\sum x_1^2 x_2$	$\sum x_2^3$	$\sum x_1 x_2^2$		$\sum x_2 y$
4.	$\sum x_1^2$	$\sum x_1^3$	$\sum x_1^2 x_2$	$\sum x_1^4$	$\sum x_1^2 x_2^2$	$\sum x_1^3 x_2$		$\sum x_1^2 y$
5.	$\sum x_2^2$	$\sum x_1 x_2^2$	$\sum x_2^3$	$\sum x_1^2 x_2^2$	$\sum x_2^4$	$\sum x_1 x_2^3$		$\sum x_2^2 y$
6.	$\sum x_1 x_2$	$\sum x_1^2 x_2$	$\sum x_1 x_2^2$	$\sum x_1^3 x_2$	$\sum x_1 x_2^3$	$\sum (x_1 x_2)^2$		$\sum x_1 x_2 y$
Целевая функция	0	0	0	0	0	0		
Решение	0	0	0	0	0	0		

Результаты расчетов с помощью процедуры «Поиск решения...» выводятся в ячейки строки «решение» табл. 3.

По данным табл. 3 можно рассчитывать параметры не только двухфакторных моделей регрессии для полного полинома, но и следующих частных вариантов полиномов:

$$2) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_1^2;$$

$$3) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_4 x_2^2;$$

$$4) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_5 x_1 x_2;$$

$$5) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_1^2 + m_4 x_2^2;$$

$$6) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_1^2 + m_5 x_1 x_2;$$

$$7) y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_4 x_2^2 + m_5 x_1 x_2.$$

Для аналитических целей параметры, рассчитанные по уравнениям регрессии всех семи видов, целесообразно свести в табл. 4.

Таблица 4

Величины параметров двухфакторного полиномиального уравнения регрессии для зависимости ВРП от численности занятых в экономике и стоимости основных фондов, построенного по данным 27 малых регионов России за 2010 г.

Решения	b	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
1-й вар-т	4,6174	0,0120	0,3770	0,000196	-0,000052	-0,000426
2-й вар-т	9,7906	0,1172	0,1849	-0,000093		
3-й вар-т	5,4463	0,0349	0,3402		-0,000249	
4-й вар-т	4,5672	0,0996	0,2696			-0,000229
5-й вар-т	5,7635	0,0279	0,3450	0,000011	-0,000256	
6-й вар-т	4,4483	0,0103	0,3807	0,000235		-0,000522
7-й вар-т	5,2610	0,0378	0,3388		-0,000240	-0,000012

Как было отмечено выше, для оценки приемлемости построенных уравнений регрессии следует рассчитать ряд статистических характеристик.

В табл. 5 приведены данные, иллюстрирующие методику расчета двух наи-

более значимых из статистических характеристик: коэффициента детерминации (R) и средней ошибки аппроксимации (A). Эта же таблица иллюстрирует промежуточные расчеты, которые для этого требуется выполнить (определить для каждого из

уравнений регрессии расчетные значения (y_x), а также

$$\sum(y - y_x)^2 \text{ и } \sum(y - y_{cp})^2.$$

Рассмотрим методику расчета параметров и статистических характеристик для двухфакторного полинома с помощью встроенной статистической функции «ЛИНЕЙН» (т.е. вторым способом).

В этом случае величины параметров и ряд дополнительных статистических характеристик рассчитываются и выводятся в виде следующей таблицы-шаблона, первая строка которой содержит величины параметров, вторая строка – их стандартные ошибки, остальные три – содержат шесть статистических характеристик. Их сущность и методику расчета см., например, в [2].

Таблица 5

Фрагмент таблицы, иллюстрирующей методику расчета статистических характеристик (индекса корреляции и средней ошибки аппроксимации) для двухфакторных полиномиальных моделей регрессии

2010	ВРП, млрд руб.	Числ, тыс. чел.	ОФ, млрд руб.	
	Y	$X1$	$X2$	$(Y - Y_{cp})^2$
	1	2	3	4
Республика Ингушетия	18,7	65,5	41	3045,4
...
Астраханская область	132,2	446,3	530	3400,6
Среднее значение	73,9	274,1	222	1256,0
R				
A				

Продолжение табл. 5

1-й вариант	2-й вариант		7-й вариант			
Y_x	$(Y - Y_x)^2$	Y_x	$(Y - Y_x)^2$...	Y_x	$(Y - Y_x)^2$
5	6	7	8	...	17	18
20,5	3,1	24,6	35,4	...	21,5	8,0
...
133,4	1,5	141,5	85,9	...	1994,9	4208,6
73,9	150,234	73,9	164,196	...	1994,9	4208,6
0,93829		0,9323	0,93829		0,9359	
16,6		17,3			16,9	

Окончание табл. 5

$m5$	$m4$	$m3$	$m2$	$m1$	b
se5	se4	se3	se2	se1	seb
r^2	sey				
F	df				
SSresid	SSreg				

Особенность этой методики состоит в том, что для расчетных значений создается таблица-шаблон в виде таблицы 6. При этом количество столбцов в таблице равно числу параметров уравнения, а количество строк равно пяти. В частности, для расчета параметров и характеристик полного полинома 1 создается таблица-шаблон размерности 6×5 (см. табл. 6).

Таким образом, чтобы рассчитать параметры и статистические характеристики

полиномиальной модели вторым способом требуется:

- создать таблицу-шаблон (табл. 6);
- активировать процедуру «Мастер функции...», в первом его окне выбрать категорию «статистические», а затем (во втором окне «Мастера функции») – встроенную функцию «ЛИНЕЙН»;
- выполнить во 2-м окне предусмотренные в нем действия, а именно: выбор «известных значений y », выбор «известных

значений x », конст., статистика – и нажать клавишу «ОК»;

– нажать комбинацию клавиш Shift + Ctrl + Enter.

В таком виде таблица 6 неудобна для анализа. Поэтому на её основе целесообразно

создать одну или несколько аналитических таблиц-шаблонов. В частности, для сравнительной оценки ключевых статистических характеристик двухфакторных полиномов второго порядка нами создана аналитическая табл. 7.

Таблица 6

Величины параметров и статистических характеристик для двухфакторных уравнений регрессии полиномиального вида для зависимости ВРП от численности занятых в экономике и стоимости основных фондов, построенных по данным 27 малых регионов России по данным за 2010 г.

-0,00043	-0,00005	0,00020	0,3769	0,0120	4,6178
0,00113	0,00058	0,00051	0,1522	0,1127	9,9958
0,88039	13,8981	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
30,9	21	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
29855,8	4056,3	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Таблица 7

Величины ключевых статистических характеристик различных вариантов двухфакторных полиномов второго порядка, выражающих зависимость ВРП от численности занятых в экономике и стоимости основных фондов по данным 27 малых регионов России за 2010 г.

	1	2	3	4	5	6	7
sey	13,898	13,884	13,624	13,581	13,326	13,625	13,527
r^2	0,8804	0,8693	0,8796	0,8803	0,8796	0,8796	0,8759
F	30,9	51,0	40,2	40,5	56,0	40,2	54,1
A	18,8	18,8	18,4	18,4	18,0	18,4	18,3

Как видно из табл. 7, практически все семь вариантов полиномов второго порядка оказались приемлемыми для оценки исследуемой зависимости, поскольку минимальные и максимальные значения величин трех статистических характеристик различаются

по вариантам весьма незначительно: от 13,3 до 13,9 (sey), от 0,8796 до 0,8804 (r^2), от 18,0 до 18,8 (A).

Ниже приведены три наиболее значимых из построенных нами вариантов полиномиальных уравнений регрессии:

а) $y = 4,6174 + 0,0120x_1 + 0,3770x_2 + 0,000196x_1^2 - 0,000052x_2^2 - 0,000426x_1x_2$. – полный полином 2-го порядка (1 вариант);

б) $y = 5,7635 + 0,0279x_1 + 0,3450x_2 + 0,000011x_1^2 - 0,000256x_2^2$. – вариант, наиболее близкий к полному полиному (5-й вариант);

в) $y = 4,4483 + 0,0103x_1 + 0,3807x_2 + 0,000235x_1^2 - 0,000522x_1x_2$. – наиболее приемлемый вариант по статистическим характеристикам (6-й вариант).

Все операции, связанные с выполнением расчетов и процедурами обработки информации, нами сведены в единую компью-

терную модель, которая апробирована на примере 27 средних и 25 крупных регионов России за 2010 г.

Список литературы

1. Адамдзиев К.Р., Адамдзиева А.К. Оценка зависимости ВРП от инвестиций, численности занятых в экономике и стоимости основных фондов с помощью моделей панельных данных (на примере регионов России) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2011. – № 9. – С. 68–70.
2. Лавренов С.М. Excel: Сборник примеров и задач. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 336 с.
3. Математическое и компьютерное моделирование экономики регионов. 20 фев. 2011 ... III Студенческий научный форум (15–20 февраля 2011 года) rae.ru/forum2011/164.
4. Практикум по эконометрике: под ред. И.И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 344 с.
5. Россия в цифрах, 2011: Крат. Стат. Сб. / Росстат. – М., 2011. – 581 с.
6. Эконометрика: учебное пособие в схемах и таблицах; под ред. д-ра экон. наук, проф. С.А. Орехова. – М.: Эксмо, 2008. – 224 с.

References

1. Adamdziev K.R., Adamdzieva A.K. Evaluation of GRP ratio from investments, staff number in the economy and fixed capital cost by panel data models (through the example of regions of Russia) // International journal of applied and fundamental research. 2011. no. 9. pp. 68–70.

2. Lavrenov S.M. Excel: A collection of samples and tasks. M.: Finance and Statistics, 2008. 336 p.

3. Mathematical and computer simulation of regions' economy. <http://www.rae.ru/forum2011/164> 20 Feb. 2011... 3d Student's scientific forum (15 – February 20, 2011) rae.ru/forum2011/164 <http://www.rae.ru/forum2011/164>/

4. Practical work on econometrics. Edited by Yeliseeva I.I. – 2nd edition, rev. and suppl. – M.: Finance and Statistics, 2008. – 344 p.

5. Russia in figures, 2011: Brief Statistical Handbook / Rosstat. – M., 2011. – 581 p.

6. Econometrics: Handbook: diagrams and tables. Edited by D.Sc. (Economics), Prof. Orekhov S.A. – M.: Eksmo, 2008. – 224 p.

Рецензенты:

Кутаев Ш.К., д.э.н., зав. отделом Воспроизводства населения и трудовых ресурсов Института социально-экономических исследований Дагестанского научного центра, г. Махачкала;

Алиев М.А., д.э.н., профессор кафедры экономической теории, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», г. Махачкала.

Работа поступила в редакцию 23.03.2014.