УДК 541.64,536,622.692.4.058

ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ТВЭЛОВ И НЕАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Симонова О.С., Логинов В.С.

ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», Томск, e-mail: ossimonova@mail.ru

Сформулирована математическая модель нестационарного температурного режима тепловыделяющей системы, состоящей из произвольного числа тепловыделяющих элементов (твэлов) с диэлектрическими слоями или из охлаждающих каналов. Рассмотрены три способа проверки модели: первый – на основе физических размерностей всех величин; второй – число N одномерных дифференциальных уравнений в частных производных должно содержать $3N$ краевых условий однозначности; третий – если внутренние источники постоянны или равны нулю, то решение исходной краевой задачи совпадает с известным решением в литературе. Приведен пример расчета стационарного температурного поля в полом цилиндрическом тепловыделяющем элементе с оболочками. Рассмотрены два случая: в первом – функция тепловыделения зависит от радиуса; во втором – тепловыделение – постоянная величина.

Ключевые слова: пластина, цилиндр, шар, нестационарный режим, коэффициент теплообмена, термическое сопротивление, теплопроводность, тепловыделяющий элемент

ONE DIMENSIONAL NONSTATIONARY MODEL OF THE SYSTEM WITH HEAT-GENERATING OF AN ARBITRARY NUMBER OF FUEL RODS AND INACTIVE ELEMENTS

Simonova O.S., Loginov V.S.

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, *e-mail: ossimonova@mail.ru*

A mathematical model is formulated for the nonstationary temperature regime fluid Systems with heat, consisting of an arbitrary number of fuel elements with dielectric layers or of the cooling channels. Considered three ways to test the model: the first method – based on the physical dimensions of all sizes; the second method is the number of N -dimensional differential equations must contain 3N uniqueness of boundary conditions; third – if internal sources are constant or zero, the solution of the initial boundary value problem coincides with the known solution in the literature. An example of calculation of stationary temperature field in a hollow cylindrical fuel element with shells. Considered two cases: the first – the function of heat depends on the radius, in the second – the heat – a constant.

Keywords: plate, cylinder, sphere, nonstationary regime, heat transfer coefficient, thermal resistance, thermal conductivity, heat-generating element

В учебной литературе [1–4 и др.] по тепломассообмену для студентов энергетического и электротехнического направления рассмотрены задачи стационарной теплопроводности, при решении которых приводится обоснование коэффициента теплопередачи, термического сопротивления стенки и эффективного коэффициента теплообмена. Представляет методический и практический интерес в обобщенной постановке нестационарной задачи теплопроводности с неравномерно распределенными внутренними источниками теплоты.

Постановка задачи

Пусть тепловыделяющая система состоит из произвольного числа тепловыделяющих, диэлектрических элементов (или наряду с ними каналов для прохождения охлаждающих сред или теплоносителей) с геометрическими размерами ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., ξ_{i+1}, ξ_{m+1}. Коэффициенты теплопроводности материалов и сред являются известными и постоянными величинами. О переменности их свойств – от времени, координат, температуры, структуры конкретного материала будем учитывать через эффективные значения – λ_i. Внутри твэлов действуют внутренние источники теплоты – $q_{Vj}(\xi, \tau)$. Они являются функциями, по крайней мере, непрерывными, дифференцируемыми и интегрируемыми в пределах линейного размера элемента j (1, 2, 3, ..., i, ..., m). Имеют место ограниченные величины $q_{Vj}(\xi, \tau) \le M_j$. Принимается, что температурное поле в тепловыделяющем элементе (твэле) и канале симметрично плоскости $\xi = 0$.

В диэлектрических слоях (или в охлаждающих каналах) внутренние источники теплоты зачастую принимаются равными нулю, но может иметь место при наличии химических реакций теплоперенос с фазовыми превращениями (кипение теплоносителя, конденсация паров, плавление, кристаллизация и т.п.). Заданы постоянные во времени коэффициенты теплообмена – α_1, α_2, т.е. теплообмен с внутренней и внешней поверхности тепловыделяющей системы осуществляется по закону Ньютона. Физически это означает, что температурное поле в системе твердых тел не зависит от закона распределения температур в средах – $T_{ж1}$, $T_{ж2}$. Существование изотермических поверхностей или отсутствие теплоты по другим направлениям (кроме ξ) говорит о его одномерном изменении. На границах контакта элементов существует идеальный контакт.

Система уравнений, описывающая нестационарный процесс теплопроводности в тепловыделяющей системе, имеет вид

$$c_{pj}\rho_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^n}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^n \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial \xi}\right) + q_{Vj}(\xi,\tau), \quad (1)$$

$$\tau > 0, \quad \xi_j < \xi < \xi_{j+1},\ j = 1,2,3,...,i,...,m,$$

где N – общее число элементов.

Начальные условия

$$T_j(\xi, \tau = 0) = T_{Hj}(\xi),$$

граничные условия

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi_1,\tau)}{\partial \xi} = \alpha_1[T_1(\xi_1,\tau) - T_{ж1}];$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi_2,\tau)}{\partial \xi} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi_2,\tau)}{\partial \xi};$$

$$T_1(\xi_2, \tau) = T_2(\xi_2,\tau);$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i(\xi_{i+1},\tau)}{\partial \xi} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(\xi_{i+1},\tau)}{\partial \xi};$$

$$T_i(\xi_i,\tau) = T_{i+1}(\xi_{i+1},\tau);$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T_m(\xi_{m+1},\tau)}{\partial \xi} = \alpha_2[T_m(\xi_{m+1},\tau) - T_{ж2}].$$

Здесь ξ – обобщенная координата; τ – текущее время; ξ_i – координата на границе соприкосновения слоев; $n = 0$, $\xi = x$ – неограниченная пластина; $n = 1$, $\xi = r$ – цилиндр; $n = 2$, $\xi = r$ – шар; $T_j(\xi, \tau)$, $T_{ж1}$, $T_{ж2}$, $q_{Vj}(\xi, \tau)$ – соответственно температуры твэла, окружающих сред и функции тепловыделения; c_{pj}, ρ_j, λ_j, λ_i – соответственно удельная массовая изобарная теплоемкость, плотность, коэффициенты теплопроводности конкретного элемента.

Проверка математической модели. Необходимость в проверке вызвана тем, что в литературе имеют место некорректно сформулированные математические модели.

Первый способ проверки. Будем исходить из физических размерностей всех величин. Пусть, например, $n = 2$ – шар, $j = 1, 2$. Дифференциальное уравнение теплопроводности в левой и правой части имеют размерность Вт/м³:

$$\left[c_{p1}\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau}\right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\frac{\text{К}}{\text{с}}\right] = \text{Вт/м}^3;$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)\right] = \left[\lambda_1\left\{\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}\right\}\right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}\left\{\frac{\text{К}}{\text{м}^2} + \frac{1}{\text{м}}\frac{\text{К}}{\text{м}}\right\}\right] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}; \qquad [q_{V1}(r)] = \text{Вт/м}^3.$$

Таким образом, по размерности физических величин система уравнений записана верно.

Второй способ проверки. Число дифференциальных уравнений в частных производных – N после их решения будет в общем решении содержать $3N$ констант интегрирования. Докажем это. Пусть $j = 1,2$; $N = 2$, т.е. рассматриваются всего два элемента. Для этого случая необходимо задать 6 краевых условий. В этом можно легко убедиться.

Третий способ проверки. Для стационарного режима $\frac{\partial T_j}{\partial \tau} = 0$. Если внутренние источники теплоты – постоянные величины или равны нулю, то получим известные в литературе решения. Наличие переменного по координате источника теплоты приводит к сложному аналитическому решению [5], но для реализации на ЭВМ они не представляют трудностей.

Пример 1. В стационарном режиме в тепловыделяющей сборке (рисунок) с геометрическими размерами $r_0 = 0{,}02$ м, $r_1 = 0{,}01$ м, $r_2 = 0{,}0105$ м, $r_3 = 0{,}029$ м, $r_4 = 0{,}0295$ м. Тепловыделение изменяется по зависимости:

$$q_v = q_{v0}\cdot(1 + b\cdot r^2),$$

где

$$q_{v0} = 5{,}19\cdot10^5\ \text{Вт/м}^3,\ b = 1{,}5/r_0^2;$$

$$r = 0{,}0275\ \text{м},\ \alpha_1 = 40000\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)};$$

$$\alpha_1 = 10\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)},\ T_{ж1} = 573{,}15\ \text{К};$$

$$T_{ж2} = 293{,}15\text{К},\ \lambda_1 = \lambda_3 = 23\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$\lambda_2 = 15\ \text{Вт/(мК)}.$$

Найти максимальную температуру в тепловыделяющей сборке.

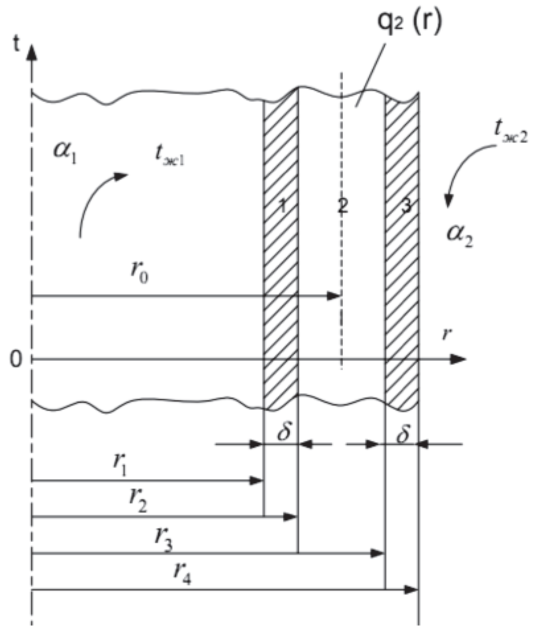

Схема задачи:
1,3 – оболочки; 2 – полый цилиндрический тепловыделяющий элемент

Решение. Определим термические сопротивления оболочек

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 4,621\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{мК}}{\text{Вт}};$$

$$R_2 = \frac{1}{\lambda_3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{\alpha_2 r_4} = 3,391\,\frac{\text{мК}}{\text{Вт}};$$

$$\alpha_{\text{эфф1}} = \frac{1}{r_1 R_1} = 2,164\cdot 10^4\ \text{Вт}/(\text{м}^2\text{K});$$

$$\alpha_{\text{эфф2}} = \frac{1}{r_3 R_2} = 10,17\ \text{Вт}/(\text{м}^2\text{K}).$$

Введем безразмерные числа. Число Био

$$Bi_1 = \frac{\alpha_{\text{эфф1}} r_2}{\lambda_2} = 15,147, \quad Bi_2 = 0,007.$$

Функция Померанцева

$$Po(R) = \frac{q_v(r) r_2^2}{\lambda_2 (T_{\text{ж1}} - T_{\text{ж2}})} = \frac{1,991\cdot 10^6 \cdot 0,0105^2}{15\cdot(573,15 - 293,15)} = 0,052;$$

$$R = \frac{r}{r_2} = 2,619.$$

Окончательное решение задачи (1) для стационарного режима имеет вид

$$\theta_{\text{стац}}(R) = \phi(R) - \phi(R_0) + A_1\cdot\left[\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - \frac{1}{Bi_2 R_0}\right] - \frac{\psi(R_0)}{Bi_2 R_0} - \theta_{\text{ж}}, \tag{2}$$

где

$$\psi(R) = -\int Po(R) R\,dR;$$

$$\phi(R) = \int \psi(R)\frac{dR}{R};$$

$$A_1 = -\frac{\left[\theta_{\text{ж}} + \phi(R_0) - \phi(1) + \dfrac{\psi(1)}{Bi_1} + \dfrac{\psi(R_0)}{Bi_2 R_0}\right]}{\ln(R_0) + 1/Bi_1 + 1/(Bi_2 R_0)}.$$

Для нашего примера, согласно (2),

$$\psi(R) = -Po_0\frac{R^2}{2}\left(1 + B\frac{R^2}{2}\right) = 0,113;$$

$$\phi(R) = -Po_0\frac{R^2}{4}\left(1 + B\frac{R^2}{4}\right) = 0,04;$$

$$\phi(1) = -\frac{Po_0}{4}\left(1 + \frac{B}{4}\right) = 3,758\cdot 10^{-3};$$

$$\phi(R_0) = 0,113; \quad \psi(R_0) = 0,134;$$

$$\phi(1) = 3,758\cdot 10^{-3}; \quad \psi(1) = 8,22\cdot 10^{-3}$$

Тогда максимальная температура в тепловыделяющей сборке будет равна

$$\theta_{\text{стац}}(R = 2{,}619) = 0{,}08096;$$

$$T_{\text{стац}}(r_0 = 0{,}0275) =$$

$$= T_{\text{ж}1} + \theta_{\text{стац}}(R = 2{,}619)\,(T_{\text{ж}1} - T_{\text{ж}2}) = 322{,}7\,°\text{C}.$$

Пример 2. Определите распределение температуры по радиусу в полом цилиндрическом тепловыделяющем элементе с оболочками, если принять постоянное по радиусу тепловыделение $q_V(r) = q_{V0}$. Какова максимальная погрешность расчета при такой замене тепловыделения в полом цилиндрическом твэле?

Решение:

Схема задачи приведена на рисунке. Окончательное решение задачи (1) для данного случая имеет вид

$$T_2(r) = T_{\text{ж}1} + \frac{q_{V0}}{2}\left[\frac{r_2^2 - r^2}{2\lambda_2} - \frac{r^2}{\alpha_{\text{эфф}1}}\right] + C_1\left(\frac{1}{\alpha_{\text{эфф}1} r_2} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right).$$

Здесь

$$C_1 = \frac{1}{R_{\text{ЦЗ}}}\left\{T_{\text{ж}2} - T_{\text{ж}1} + \frac{q_{V0}}{2}\left[\frac{r_3}{\alpha_{\text{эфф}2}} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2\lambda_2} + \frac{r_2}{\alpha_{\text{эфф}1}}\right]\right\}. \quad (3)$$

Подставляя исходные данные $q_{V0} = 5{,}19\cdot105$ Вт/м³, находим значения $C_1 = 134{,}694$ Вт/м, $R_{\text{ЦЗ}} = 3{,}463$ мК/Вт.

Погрешность расчета распределения температур по радиусу относительно точных температур

r, 10^{-3} м	$T_2(r)$, K Расчет по (1)	ε, %
10,5	573,617	0,254
12,0	574,524	0,761
14,0	575,458	1,328
16,0	576,138	1,797
20,0	576,897	2,503
22,0	577,026	2,758
$r_0 = 23{,}0$	577,036	3,07
26,0	576,865	3,08
29,0	576,418	3,15

Погрешность расчета в сравнении с расчетом по формуле (2)

$$\varepsilon_2 = \frac{T(r) - T_2(r)}{T(r)} 100\ \%.$$

где $T(r)$ – точное значение, К.

Координата максимальной температуры

$$r_0 = \sqrt{\frac{2C_1}{q_{V0}}} = 0{,}023\ \text{м} = 23\ \text{мм}.$$

Как показывает анализ проведенного расчета максимальная погрешность распределения по радиусу температур не превышает 3,3 %, а по определению координаты максимальной температуры $r_0 \approx 16{,}4\,\%$

Вывод

Приведен пример расчета стационарного температурного поля в полом цилиндрическом тепловыделяющем элементе с оболочками. Показано, что погрешность расчета по сравнению с точным сложным решением не превышает 3,3 %.

Список литературы

1. Дорохов А.Р., Заворин А.С., Казанов А.М., Логинов В.С. Моделирование тепловыделяющих систем: учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2000. – 234 с.

2. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.

3. Соколов Е.Я. Теплофикация и тепловые сети: учебник для вузов. – 7-е изд. – М.: Изд-во МЭИ, 2001. – 472 с.

4. Залесский А.М., Кукеков Г.А. Тепловые расчеты электрических машин. – Л.: Энергия, ЛО, 1967. – 369 с.

5. Логинов В.С. Приближенные методы теплового расчета активных элементов электрофизических установок. – М.: Физматлит, 2000. – 272 с.

References

1. Dorohov A.R., Zavorin A.S., Kazanov A.M., Loginov V.S. Modeling fuel systems: Textbook. Tomsk: NTL, 2000. 234p.

2. Zarubin V.S. Engineering methods for solving problems of heat conduction. Energoatomizdat, 1983. 328 p.

3. Sokolov E.Y. District heating and heat networks: Textbook for universities. 7th ed. Moscow: Publishing House of the MEI, 2001. 472 p.

4. Zaleski A.M., Kukekov G.A. Thermal design of electrical machines. Leningrad: Energiya, Leningrad, 1967. 369 p.

5. Loginov V.S. Approximate methods of thermal analysis of active elements electrical installations. M.: Fizmatlit, 2009. 272 p.

Рецензенты:

Архипов В.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск;

Борисов Б.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета, г. Томск.

Работа поступила в редакцию 18.03.2014.