УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ СОЕДИНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МКЭ

Николаев А.П., Киселёв А.П., Гуреева Н.А., Киселёва Р.З., Леонтьева В.В.

ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет», Волгоград, e-mail: viktoriyaleonteva@yandex.ru

Для определения напряженно-деформированного состояния в зонах пересечения произвольно нагруженных оболочек вращения из разнородных материалов на основе метода конечных элементов используется ранее разработанный объемный шестигранный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных. Для конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек вращения, получены соотношения между узловыми неизвестными одной оболочки, принятой за основную, и узловыми неизвестными другой оболочки, примыкающей к основной. На основе полученных соотношений выполнены преобразования матриц жесткости и векторов узловых нагрузок конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек из разнородных материалов. На основе анализа результатов расчета можно сделать вывод о корректности алгоритма определения напряженно-деформированного состояния в зонах сочленения оболочек вращения при произвольном нагружении.

Ключевые слова: МКЭ, произвольно нагруженные оболочки, объёмный шестигранный конечный элемент, узловые неизвестные, условия на границе пересечения оболочек, разнородный материал

DETERMINATION OF TENSION IN ZONE SOYEDENENY OF COVERS OF ROTATION FROM DIVERSE MATERIALS ON THE BASIS OF A METHOD OF FINAL ELEMENTS

Nikolaev A.P., Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Leonteva V.V.

Volgograd State Agricultural University, Volgograd, e-mail: viktoriyaleonteva@yandex.ru

For definition strained the deformed condition in crossing zones of arbitrary loaded c shells of rotation from diverse materials on the basis of a method of finite elements earlier developed volume six-sided finite element with nodal unknown in the form of displacements and their derivatives is used. For the finite elements adjacent to border of a joint of shells of rotation, relation between nodal unknown of one cover taken for main, and nodal unknown of other shells adjoining main are received. On the basis of the received relations transformations of matrixes of rigidity and vectors of nodal loadings of the finite elements adjoining border of a joint of shells from diverse materials are executed. Based on the analysis of the calculation results can be concluded about the correctness of the algorithm for determining the stress-strain state in the areas sochlineniya shells of revolution under arbitrary loading.

Keywords: finite element method, arbitrarily loaded shells of revolution, surround hexagonal finite element, the nodal unknowns, the conditions at the border crossing membranes, heterogeneous material

Из-за сложности решения дифференциальных уравнений, описывающих деформированное состояние оболочек вращения, большое распространение получили численные методы определения их напряженно-деформированного состояния. Среди численных методов особое место занимает метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках: в формулировке метода перемещений разрабатывались конечные элементы в двумерной постановке [1, 2, 3] и в трехмерной постановке [4, 5]; в смешанной формулировке использовались объемные конечные элементы [6]. Объемные конечные элементы в формулировке метода перемещений успешно использовались для расчета слоистых конструкций [7, 8, 9].

В настоящей работе для расчета произвольно нагруженной оболочки вращения в координатной системе s, θ, ζ используется шестигранный восьмиузловой конечный элемент с узлами i, j, k, l на нижней грани по координате ζ и узлами m, n, p, h по верхней грани [4].

Используемая в настоящей работе матрица жесткости объёмного шестигранного конечного элемента формируется на основе равенства работ внешних и внутренних сил [4, 5] и представляется выражением

$$\underset{96\times 96}{[K]}\underset{96\times 1}{\{V_y\}}=\underset{96\times 1}{\{f_y\}}, \qquad (1)$$

где $\underset{1\times 96}{\{V_y\}^T}=\left\{\underset{1\times 12}{\{v_y^i\}^T}\ \{v_y^j\}^T\ \{v_y^k\}^T\ \{v_y^l\}^T\ \{v_y^m\}^T\ \{v_y^n\}^T\ \{v_y^p\}^T\ \underset{1\times 12}{\{v_y^h\}^T}\right\}$ – вектор узловых неизвестных в криволинейной системе координат s, θ, ζ;

$$\underset{1\times 12}{\{v_y^{\omega}\}^T}=\left\{v^{1\varpi}\ v^{2\varpi}\ v^{3\varpi}\ v_{,s}^{1\varpi}\ \ v_{,s}^{2\varpi}\ \ v_{,s}^{3\varpi}\ \ v_{,r\theta}^{1\varpi}\ \ v_{,r\theta}^{2\varpi}\ \ v_{,r\theta}^{3\varpi}\ v_{,\zeta}^{1\varpi}\ \ v_{,\zeta}^{2\varpi}\ v_{,\zeta}^{3\varpi}\right\};$$

($\varpi = i, j, k, l, m, n, p, h$) $[K]$ – матрица жесткости элемента в глобальной системе координат; $\{f\}$ – вектор узловых нагрузок элемента в глобальной системе координат.

1. *Геометрия оболочки вращения в узловой точке.* Положение произвольной точки M срединной поверхности произвольно нагруженной оболочки вращения в декартовой системе координат xoz определяется радиус-вектором (рис. 1)

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (2)$$

где $r = r(x)$ – радиус вращения точки M относительно оси ox; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против часовой стрелки.

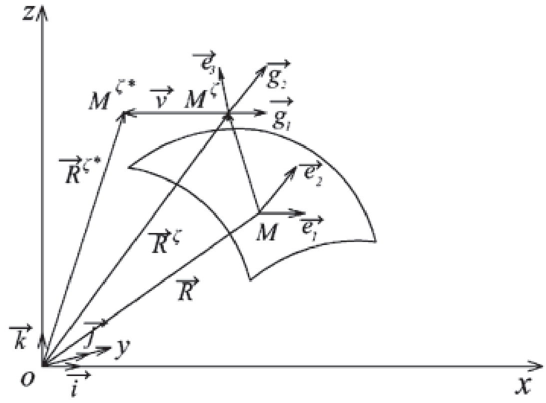

Рис. 1. Перемещение точки в результате деформирования оболочки из положения M^{ζ} в положение $M^{\zeta*}$

Векторы локального базиса точки M определяются выражениями

$$\begin{gathered}
\vec{e}_1 = \vec{R},_s = x,_s \vec{i} + r,_s \sin\theta\vec{j} + r,_s \cos\theta\vec{k};\\
\vec{e}_2 = \frac{\partial\vec{R}}{r\partial\theta} = \cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k};\\
\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \left(x,_s \vec{i} + r,_s \sin\theta\,\vec{j} + r,_s \cos\theta\,\vec{k}\right)\times\\
\times\left(\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}\right) = -\vec{i}r,_s + \vec{j}x,_s \sin\theta + \vec{k}x,_s \cos\theta,
\end{gathered} \quad (3)$$

где $r,_s = r,_x\, x,_s$ – производная радиуса вращения по дуге меридиана s.

Соотношения (3) можно представить в матричном виде

$$\{\vec{e}\} = [\lambda]\{\vec{i}\},$$

где
$$\{\vec{e}\}^T = \{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\};\quad (4)$$
$$\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\}.$$

Производные векторов локального базиса определяются дифференцированием (3) и с учетом (4) представляются в матричном виде

$$\begin{gathered}
\{\vec{e},_s\} = [l]\{\vec{e}\};\\
\{\vec{e},_\theta\} = [d]\{\vec{e}\};\\
\{\vec{e},_t\} = [h]\{\vec{e}\},
\end{gathered} \quad (5)$$

где
$$\begin{gathered}
\{\vec{e},_s\}^T = \{\vec{e}_{1,s}\ \vec{e}_{2,s}\ \vec{e}_{3,s}\};\\
\{\vec{e},_\theta\}^T = \{\vec{e}_{1,r\theta}\ \vec{e}_{2,r\theta}\ \vec{e}_{3,r\theta}\};\\
\{\vec{e},_\zeta\}^T = \{\vec{e}_{1,\zeta}\ \vec{e}_{2,\zeta}\ \vec{e}_{3,\zeta}\}.
\end{gathered}$$

Радиус-вектор произвольной точки оболочки M^{ζ}, отстоящей на расстоянии ζ от срединной поверхности, можно представить выражением

$$\vec{R}^{\zeta} = \vec{R} + \zeta\,\vec{e}_3. \quad (6)$$

Базисные векторы точки M^{ζ} определяются дифференцированием (5)

$$\begin{gathered}
\vec{g}_1 = \vec{R},_s^{\zeta} = \left(\vec{R} + \zeta\vec{e}_3\right),_s = \vec{e}_1 + \zeta\left(l_{31}\vec{e}_1 + l_{32}\vec{e}_2 + l_{33}\vec{e}_3\right) =\\
= \vec{e}_1\left(1 + \zeta l_{31}\right) + \zeta l_{32}\,\vec{e}_2 + \zeta l_{33}\,\vec{e}_3;\\
\vec{g}_2 = \frac{\partial\vec{R}^{\zeta}}{r\partial\theta} = \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\vec{R} + \zeta\,\vec{e}_3\right) = \vec{e}_2 + \zeta\left(d_{31}\,\vec{e}_1 + d_{32}\,\vec{e}_2 + d_{33}\,\vec{e}_3\right) =\\
= \zeta d_{31}\,\vec{e}_1 + \left(1 + \zeta d_{32}\right)\vec{e}_2 + \zeta\, d_{33}\,\vec{e}_3;\\
\vec{g}_3 = \vec{R},_\zeta^{\zeta} = \left(\vec{R} + \zeta\,\vec{e}_3\right),_\zeta = \vec{e}_3.
\end{gathered} \quad (7)$$

Произвольная точка M^{ζ} оболочки под действием заданной нагрузки займет положение $M^{\zeta*}$, которое определяется вектором $\vec{v}$ с компонентами в базисе точки M срединной поверхности

$$\vec{v} = v^1\,\vec{e}_1 + v^2\,\vec{e}_2 + v^3\,\vec{e}_3 = v^i\,\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Производные вектора перемещения по координатам s, r, θ, ζ с учётом (5) имеют вид

$$\begin{gathered}
\vec{v}_{,s} = \left(v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3\right)_{,s} = v_{,s}^1\,\vec{e}_1 + v^1\vec{e}_{1,s} + v_{,s}^2\,\vec{e}_2 + v^2\vec{e}_{2,s} + v_{,s}^3\,\vec{e}_3 + v^3\vec{e}_{3,s} = \\
= \vec{e}_1\left(v_{,s}^1 + v^1 l_{11} + v^2 l_{21} + v^3 l_{31}\right) + \vec{e}_2\left(v^1 l_{12} + v_{,s}^2 + v^2 l_{22} + v^3 l_{32}\right) + \\
+ \vec{e}_3\left(v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v_{,s}^3 + v^3 l_{33}\right); \\
\vec{v}_{,r\theta} = v_{,r\theta}^1\,\vec{e}_1 + v^1\vec{e}_{1,r\theta} + v_{,r\theta}^2\,\vec{e}_2 + v^2\vec{e}_{2,r\theta} + v_{,r\theta}^3\,\vec{e}_3 + v^3\vec{e}_{3,r\theta} = \\
= v_{,r\theta}^1\,\vec{e}_1 + v^1\left(d_{11}\vec{e}_1 + d_{12}\vec{e}_2 + d_{13}\vec{e}_3\right) + v_{,r\theta}^2\,\vec{e}_2 + v^2\left(d_{21}\vec{e}_1 + d_{22}\vec{e}_2 + d_{23}\vec{e}_3\right) + \\
+ v_{,r\theta}^3\,\vec{e}_3 + v^3\left(d_{31}\vec{e}_1 + d_{32}\vec{e}_2 + d_{33}\vec{e}_3\right) = \vec{e}_1\left(v_{,r\theta}^1 + v^1 d_{11} + v^2 d_{21} + v^3 d_{31}\right) + \\
+ \vec{e}_2\left(v^1 d_{12} + v_{,r\theta}^2 + v^2 d_{22} + v^3 d_{32}\right) + \vec{e}_3\left(v^1 d_{13} + v^2 d_{23} + v_{,r\theta}^3 + v^3 d_{33}\right);
\end{gathered}$$

$$\vec{v}_{,\zeta} = \left(v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3\right)_{,\zeta} = v_{,\zeta}^1\vec{e}_1 + v_{,\zeta}^2\vec{e}_2 + v_{,\zeta}^3\vec{e}_3. \qquad (9)$$

Деформации в точке $M^{\zeta*}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{v}_{,s}; \\
\varepsilon_{22} &= \vec{g}_2 \cdot \vec{v}_{,r\theta}; \\
\varepsilon_{33} &= \vec{g}_3 \cdot \vec{v}_{,\zeta}; \\
2\varepsilon_{12} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{v}_{,r\theta} + \vec{g}_2 \cdot \vec{v}_{,s}; \\
2\varepsilon_{13} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{v}_{,\zeta} + \vec{g}_3 \cdot \vec{v}_{,s}; \\
2\varepsilon_{23} &= \vec{g}_2 \cdot \vec{v}_{,\zeta} + \vec{g}_3 \cdot \vec{v}_{,r\theta},
\end{aligned} \qquad (10)$$

которые можно представить для узловой точки в матричном виде

$$\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^{\varpi}\right\}} = \underset{6\times12}{\left[L^{\varpi}\right]}\underset{12\times1}{\left\{v_y^{\varpi}\right\}}, \qquad (11)$$

где $\left\{\varepsilon^{\varpi}\right\}^T = \left\{\varepsilon_{11}^{\varpi}\varepsilon_{22}^{\varpi}\varepsilon_{33}^{\varpi}2\varepsilon_{12}^{\varpi}2\,\varepsilon_{13}^{\varpi}2\varepsilon_{23}^{\varpi}\right\}$ – вектор – строка компонент деформаций в узловой точке оболочки.

Связь между напряжениями и деформациями определяется соотношениями механики сплошной среды [10]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{\alpha\beta} + 2\mu\, g^{\alpha\gamma} g^{\beta\rho} \varepsilon_{\gamma\rho}, \qquad (12)$$

где λ, μ – параметры Ламе;

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} g^{11} + 2\varepsilon_{12} g^{12} + \varepsilon_{22} g^{22} + 2\varepsilon_{13} g^{13} + \varepsilon_{33} g^{33} + 2\varepsilon_{23} g^{23}$$

– первый инвариант тензора напряжений; g_{mn}, g^{mn} – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора.

Зависимость (12) для узловой точки можно представить в виде

$$\underset{6\times1}{\left\{\sigma^{\varpi}\right\}} = \underset{6\times6}{\left[D^{\varpi}\right]}\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^{\varpi}\right\}}, \qquad (13)$$

где $\left\{\sigma^{\varpi}\right\} = \left\{\sigma^{11\varpi}\sigma^{22\varpi}\sigma^{33\varpi}\sigma^{12\varpi}\sigma^{23\varpi}\sigma^{23\varpi}\right\}$.

2. *Преобразование узловых величин в точке на грани сочленения оболочек из разнородных материалов.* Рассматриваются две произвольно нагруженные оболочки вращения в декартовых системах координат xyz и $x'y'z'$. Связь между ортами этих систем считается известной (рис. 2)

$$\left\{\vec{i}\right\} = [\phi]\left\{\vec{i}\,'\right\};\ \left\{\vec{i}\,'\right\} = [\psi]\left\{\vec{i}\right\}, \qquad (14)$$

где $\left\{\vec{i}\right\}^T = \left\{\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\right\}$; $\left\{\vec{i}\,'\right\}^T = \left\{\vec{i}\,'\ \vec{j}\,'\ \vec{k}\,'\right\}$; $\quad [\psi] = [\phi]^{-1}$.

В узловой точке, расположенной на грани пересечения оболочек вращения, нужно найти зависимости между векторами примыкающей и основной оболочек соответственно

$$\left\{v_y'\right\}^T = \left\{v^{1\prime}\ \ v_{,s'}^{1\prime}\ v_{,r\theta'}^{1\prime}\ v_{,\zeta'}^{1\prime}\ v^{2\prime}\ \ v_{,s'}^{2\prime}\ v_{,r\theta'}^{2\prime}\ v_{,\zeta'}^{2\prime}\ v^{3\prime}\ \ v_{,s'}^{3\prime}\ v_{,r\theta'}^{3\prime}\ v_{,\zeta'}^{3\prime}\right\}; \qquad (15)$$

$$\left\{v_y\right\}^T = \left\{v^1\ \ v_{,s}^1\ v_{,r\theta}^1\ v_{,\zeta}^1\ v^2\ \ v_{,s}^2\ v_{,r\theta}^2\ v_{,\zeta}^2\ v^3\ \ v_{,s}^3\ v_{,r\theta}^3\ v_{,\zeta}^3\right\}. \qquad (16)$$

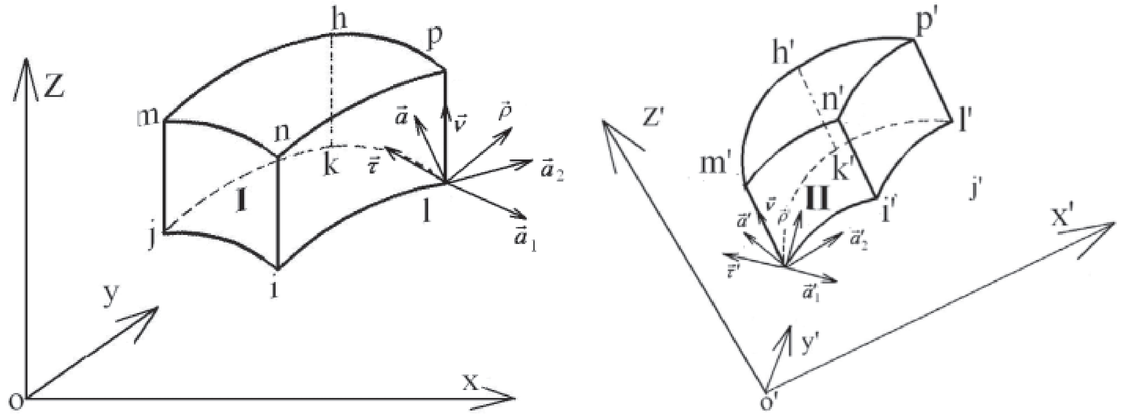

Рис. 2. Оболочки вращения в декартовых системах координат xoz и $x'o'z'$

Для этого в узловой точке на заданной поверхности пересечения оболочек используется ортогональный базис $\vec{\nu}$, $\vec{\tau}$, $\vec{\rho}$, определенный через векторы базиса декартовых координат

$$\{\vec{\nu}\}=[\gamma]\{\vec{i}\};\ \{\vec{\nu}\}=[\omega]\{\vec{i}'\}, \qquad (17)$$

где $\{\vec{\nu}\}=\{\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\rho}\}$.

С использованием (4), (7) можно по (17) получить матричное соотношение

$$\begin{aligned}&\{\vec{e}\}=[t]\{\vec{\nu}\}; \quad \{\vec{e}'\}=[t']\{\vec{\nu}\};\\ &\{\vec{g}\}=[Y]\{\vec{\nu}\}; \quad \{\vec{g}'\}=[Y']\{\vec{\nu}\},\end{aligned} \qquad (18)$$

где базисы

$$\{\vec{e}\}^T=\{\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3\},\ \{\vec{e}'\}^T=\{\vec{e}_1{}'\,\vec{e}_2{}'\,\vec{e}_3{}'\};$$

$$\{\vec{g}\}^T=\{\vec{g}_1\vec{g}_2\vec{g}_3\}\{\vec{g}'\}^T=\{\vec{g}_1{}'\vec{g}_2{}'\vec{g}_3{}'\}$$

относятся соответственно к основной и примыкающей оболочкам.

Векторы $\vec{\tau},\vec{\nu}$ лежат в плоскости грани пересечения, а вектор $\vec{\rho}$ нормален к поверхности пересечения оболочек.

Для выполнения преобразований вводятся следующие промежуточные векторы узловой точки на грани пересечения, относящиеся к примыкающей и основной оболочкам

$$\underset{1\times12}{\{v_g{}'\}^T}=\{v^{\tau'}\ \ v,_{\tau}^{\tau'}\,v,_{\nu}^{\tau'}\,v^{\nu'}\ \ v,_{\tau}^{\nu'}\,v,_{\nu}^{\nu'}\,v^{\rho'}\ \ v,_{\tau}^{\rho'}\,v,_{\nu}^{\rho'}\,\sigma^{\rho\rho'}\sigma^{\rho\nu'}\sigma^{\rho\tau'}\}; \qquad (19)$$

$$\underset{1\times12}{\{v_g\}^T}=\{v^{\tau}\ \ v,_{\tau}^{\tau}\,v,_{\nu}^{\tau}\,v^{\nu}\ \ v,_{\tau}^{\nu}\,v,_{\nu}^{\nu}\,v^{\rho}\ \ v,_{\tau}^{\rho}\,v,_{\nu}^{\rho}\,\sigma^{\rho\rho}\sigma^{\rho\nu}\sigma^{\rho\tau}\}. \qquad (20)$$

Между векторами (19) и (20) записывается матричная зависимость

$$\underset{12\times1}{\{v_g{}'\}}=\underset{12\times12}{[I]}\underset{12\times1}{\{v_g\}}, \qquad (21)$$

где [I] – матрица, на главной диагонали которой элементы равны единице.

Для определения соотношений между компонентами векторов (20), (16) используются следующие условия.

1. Условие о равенстве векторов перемещений в базисах $\{\vec{\nu}\}$ и $\{\vec{e}\}$

$$v^{\tau}\vec{\tau}+v^{\nu}\vec{\nu}+v^{\rho}\vec{\rho}=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3,$$

откуда с использованием (18) определяются компоненты $v^{\tau},v^{\nu},v^{\rho}$ через v^1,v^2,v^3

$$\begin{aligned}v^{\tau}&=t_1^1v^1+t_2^1v^2+t_3^1v^3;\\ v^{\nu}&=t_1^2v^1+t_2^2v^2+t_3^2v^3;\\ v^{\rho}&=t_1^3v^1+t_2^3v^2+t_3^3v^3.\end{aligned} \qquad (22)$$

Аналогично для примыкающей оболочки можно получить соотношения

$$\begin{aligned}v^{\tau}&=t_m^{1'}\,v^{m'};\\ v^{\nu}&=t_m^{2'}v^{m'};\\ v^{\rho}&=t_m^{3'}v^{m'}.\end{aligned} \qquad (23)$$

2. Используется выражение производной скаляра a по направлению $\vec{l}$ в криволинейной ортогональной системе координат

$$\frac{\partial a}{\partial l}=\vec{l}\cdot\vec{\nabla}a=\vec{l}\cdot\left(\vec{e}_1\frac{\partial a}{\partial s}+\vec{e}_2\frac{\partial a}{r\partial\theta}+\vec{e}_3\frac{\partial a}{\partial\zeta}\right). \qquad (24)$$

На основании (24) можно записать выражения

$$\frac{\partial v^{\tau}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial s}\left(t_1^1v^1+t_2^1v^2+t_3^1v^3\right)+\vec{\tau}\cdot\vec{e}_2\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(t_2^1v^1+t_2^2v^2+t_2^3v^3\right)+$$

$$+\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(t_3^1v^1+t_3^2v^2+t_3^3v^3\right);$$

$$\frac{\partial v^{\tau}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}v^{\tau};\quad \frac{\partial v^{\nu}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}v^{\nu};$$

$$\frac{\partial v^{\nu}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}v^{\nu};\quad \frac{\partial v^{\rho}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}v^{\rho};$$

$$\frac{\partial v^{\rho}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial s}\left(t_1^1v^1+t_2^1v^2+t_3^1v^3\right)+\vec{\nu}\cdot\vec{e}_2\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(t_1^2v^1+t_2^2v^2+t_3^2v^3\right)+$$

$$+\vec{\nu}\cdot\vec{e}_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(t_1^3v^1+t_2^3v^2+t_3^3v^3\right). \tag{25}$$

Для примыкающей оболочки можно записать аналогичные соотношения

$$\frac{\partial v^{\tau'}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{e}_1{}'\frac{\partial}{\partial s'}\left(t_1^{1'}v^{1'}+t_2^{1'}v^{2'}+t_3^{1'}v^{3'}\right)+\vec{\tau}\cdot\vec{e}_2{}'\frac{\partial}{r\partial\theta'}\left(t_2^{1'}v^{1'}+t_2^{2'}v^{2'}+t_2^{3'}v^{3'}\right)+$$

$$+\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3{}'\frac{\partial}{\partial\zeta'}\left(t_3^{1'}v^{1'}+t_3^{2'}v^{2'}+t_3^{3'}v^{3'}\right);$$

$$\frac{\partial v^{\tau'}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}'v^{\tau'};\quad \frac{\partial v^{\nu'}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}'v^{\nu'};$$

$$\frac{\partial v^{\nu'}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}'v^{\nu'};\quad \frac{\partial v^{\rho'}}{\partial s_{\tau}}=\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}'v^{\rho'};$$

$$\frac{\partial v^{\rho'}}{\partial s_{\nu}}=\vec{\nu}\cdot\vec{e}_1{}'\frac{\partial}{\partial s'}\left(t_1^{1'}v^{1'}+t_2^{1'}v^{2'}+t_3^{1'}v^{3'}\right)+\vec{\nu}\cdot\vec{e}_2{}'\frac{\partial}{r\partial\theta'}\left(t_1^{2'}v^{1'}+t_2^{2'}v^{2'}+t_3^{2'}v^{3'}\right)+$$

$$+\vec{\nu}\cdot\vec{e}_3{}'\frac{\partial}{\partial\zeta'}\left(t_1^{3'}v^{1'}+t_2^{3'}v^{2'}+t_3^{3'}v^{3'}\right). \tag{26}$$

Для тензора напряжений в различных базисах узловой точки границы пересечения оболочек имеют место соотношения

$$\sigma^{\alpha\beta}\vec{a}_{\alpha}\vec{a}_{\beta}=\sigma^{mn}\vec{g}_m\,\vec{g}_n, \tag{27}$$

где $\alpha,\beta=1,2,3;\quad \vec{a}_1=\vec{\tau};$ $\vec{a}_2=\vec{\nu};\quad \vec{a}_3=\vec{\rho}.$

Используя соотношения (18), из (27) можно сформировать матричное выражение

$$\underset{3\times1}{\left\{\sigma_{\nu}^{\varpi}\right\}}=\underset{3\times6}{\left[D_{\nu}^{\varpi}\right]}\underset{6\times1}{\left\{\sigma^{\varpi}\right\}}, \tag{28}$$

где $\left\{\sigma_{\nu}\right\}^T=\left\{\sigma^{\tau\rho}\sigma^{\nu\rho}\sigma^{\rho\rho}\right\}$.

Принимая во внимание (13) и (15), можно выразить напряжения в базисе $\left\{\vec{\nu}\right\}$ через перемещения базиса $\left\{\vec{e}\right\}$

$$\underset{3\times1}{\left\{\sigma_y^{\varpi}\right\}}=\underset{3\times6}{\left[D_{\nu}^{\varpi}\right]}\underset{6\times6}{\left[D^{\varpi}\right]}\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^{\varpi}\right\}}=\underset{3\times6}{\left[D_{\nu}^{\varpi}\right]}\underset{6\times6}{\left[D^{\varpi}\right]}\underset{6\times12}{\left[L^{\varpi}\right]}\underset{12\times1}{\left\{v_y^{\varpi}\right\}}=\underset{3\times12}{\left[L_{\sigma}\right]}\underset{12\times1}{\left\{v_y\right\}}. \tag{29}$$

Используя базис $\left\{\vec{e}'\right\}$ примыкающей оболочки, можно получить матричное соотношение

$$\underset{3\times1}{\left\{\sigma_y^{\varpi}\right\}}^T=\underset{3\times12}{\left[L_{\sigma}'\right]}\underset{12\times1}{\left\{v_y'\right\}}. \tag{30}$$

На основании выражений (29), (30), (25), (26) формируются матричные соотношения

$$\underset{12\times1}{\{v_g'\}} = \underset{12\times12}{[L_3]}\underset{12\times1}{\{v_y'\}};$$
$$\underset{12\times1}{\{v_g\}} = \underset{12\times12}{[L_4]}\underset{12\times1}{\{v_y\}}. \qquad (31)$$

Из условия равенства $\{\vec{v}_g'\}$ и $\{\vec{v}_g\}$ получается

$$\underset{12\times1}{\{v_y'\}} = \underset{12\times12}{[L_3]^{-1}}\,\underset{12\times12}{[L_4]}\underset{12\times1}{\{v_y\}} = \underset{12\times12}{[z]}\,\underset{12\times1}{\{v_y\}}. \qquad (32)$$

С использованием (32) формируется матрица преобразования [T] для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок граничного конечного элемента примыкающей оболочки

$$[K'] = [T]^T[K][T]; \qquad \{f'\} = [T]^T\{f\}. \qquad (33)$$

Пример № 1. Определялось напряженно-деформированное состояние цилиндра со сферическим днищем, находящегося под действием внутреннего давления интенсивности q (рис. 3). Цилиндр и днище выполнены из разнородных материалов.

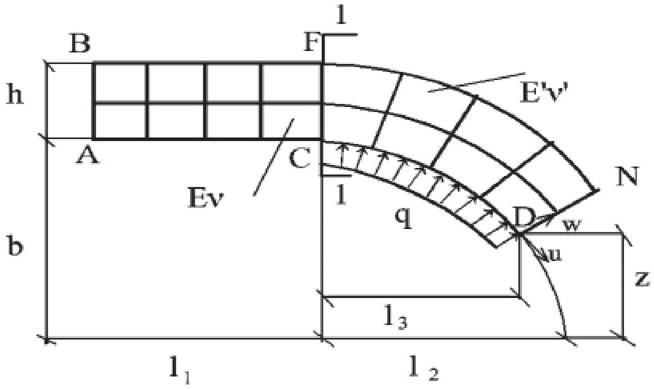

Рис. 3. Цилиндр со сферическим днищем под действием внутреннего давления интенсивности q

Были приняты следующие исходные данные: $l_1 = 0{,}2$ м, $l_2 = 0{,}1$ м, $l_3 = 0{,}09$ м, $q = 10$ Н, $h = 0{,}0005$ м, $b = 0{,}05$ м, $E = 2\cdot10^5$ МПа, $\nu = 0{,}3$, $E' = 2\cdot10^6$ МПа, $\nu' = 0{,}25$.

Конструкция разбивалась на 10 конечных элементов по толщине, на 100 элементов по длине цилиндра и на 50 по дуге круговой оболочки.

По полученным результатам построена эпюра нормальных напряжений σ_{xx} (рис. 4) в сечении 1–1 (рис. 3). Условие равновесия по силам ($\Sigma X = 0$) правой части оболочки от сечения 1-1 выполняется с погрешностью $\delta = 0{,}6\,\%$.

На основе анализа результатов выполненного примера расчета можно сделать вывод о корректности алгоритма определения напряженно-деформированного состояния в зонах сочленения оболочек вращения на основе разработанного конечного элемента [4].

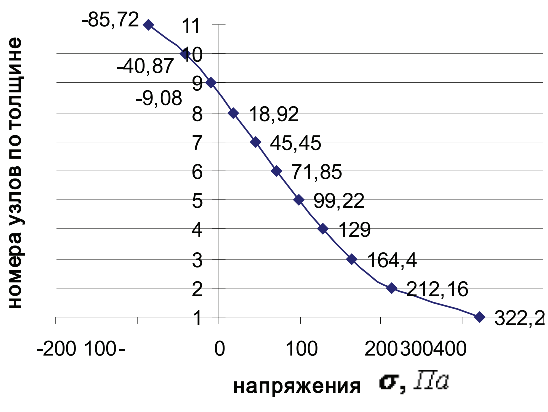

Рис. 4. Эпюра нормальных напряжений σ_{xx} в сечении 1–1 цилиндра со сферическим днищем

Список литературы

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабудинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.:Физматлит, 2006. – 392 с.

2. Бате К.Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.

3. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Расчет оболочек на основе МКЭ в двумерной постановке. – Волгоград, 2009. – 194 с.

4. Киселев А.П. Векторная аппроксимация полей перемещений объемного шестигранного конечного элемента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 1.

5. Киселев А.П. Объемный конечный элемент в виде треугольной призмы с первыми производными узловых перемещений / А.П. Киселев, А.П. Николаев // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2006. – № 1. – С. 13–18.

6. Гуреева Н.А. Восьмиугольный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейснера // МБТУ им.Баумана, Известия вузов: Машиностроение. – № 5. – С. 23–28.

7. Гуреева Н.А. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента / Н.А. Гуреева, А.П. Киселев, Р.З. Киселева // Известия ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – № 4. – С. 125–128.

8. Киселев А.П. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объёмного конечного элемента / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселёва // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2010. – № 1. – С. 106–112.

9. Киселёв А.П. Использование трёхмерных конечных элементов в расчётах прочности многослойных панелей / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселёва // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 37–40.

10. Седов А.И. Механика сплошной среды. – М:. Наука, 1976. – т. 1,535.

References

1. Golovanov A.I., Tuleneva O.N., Shigabudinov A.F. Finite Element Method in statics and dynamics of thin-walled structures. M. Fizmatlit, 2006. 392 p.

2. Bath K.Y. Finite element methods. M. Fizmatlit, 2010. 1022 p.

3. Nikolaev A.P., KlochkovYu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A. Calculation of shells on the basis of FEM in two-dimensional formulation. Volgograd, 2009. 194 p.

4. Kiselev A.P. Stock approximation displacement fields surround hexagonal finite element Sci-Tech. journal «Structural Mechanics engineering constructions and buildings» no. 1, People's Friendship University, Moscow, 2007.

5. Kiselev A.P. Volumetric finite element in the form of a triangular prism with the first derivatives nodal displacements / A.P. Kiselev, A.P. Mykolaiv / Math. Universities, Ser. «Construction». 2006. no. 1. pp. 13–18.

6. Gureeva N.A. Octagonal mixed finite element formulation based on the Reissner functional. MBTU Bauman Education News : Machinery, M.: no. 5, pp. 23–28.

7. Gureeva N.A. Calculation of multilayer cladding surround finite element / N.A. Gureeva, A.P. Kiselev, R.Z. Kiseleva News VSTU. Volgograd, 2010. no. 4. pp. 125–128 .

8. Kiselev A.P. Calculation of multilayer shells of revolution and plates surround the finite element / A.P. Kiselev, N.A. Gureeva, R.Z. Kiseleva Math. Universities, Ser. «Construction». 2010. no. 1. pp. 106–112.

9. Kiselev A.P. Using three-dimensional finite element calculations of strength of sandwich panels / A.P. Kiselev, N.A. Gureeva R.Z. Kiseleva Structural Mechanics engineering constructions and buildings. 2009. no. 4. pp. 37–40.

10. Sedov A.I. Continuum Mechanics. M.: «Science», 1976, v. 1, 535 p.

Рецензенты:

Голованов В.К., д.т.н., профессор кафедры «Начертательная геометрия и графика» ВГТУ, г. Волгоград;

Кукса Л.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов», ВолГАСУ, г. Волгоград.

Работа поступила в редакцию 26.02.2014.