УДК 519.852

МЕТОД НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

[1]Кравчук С.П., [2]Кравчук И.С., [1]Татарников О.В., [1]Швед Е.В.

[1]ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова», Москва, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

[2]ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения», Москва

Цель многих задач экономики, финансов и менеджмента сводится к выработке оптимальных решений. Одним из наиболее распространенных методов решения подобных задач является симплекс-метод, обоснованный целым рядом теорем. Нередко у исследователей возникает необходимость в более простом и наглядном, альтернативном способе решения задач линейного программирования. Предлагаемый в работе метод обладает этими качествами и, кроме того, для него не требуется доказательства сопутствующих теорем. Суть метода сводится к решению системы неравенств одного знака, которая приводится к одному неравенству. Одним из существенных достоинств метода является определенность числа шагов алгоритма. Предлагаемый метод может быть использован как для решения экономических задач, так и для проверки решений, получаемых с использованием симплекс-метода.

Ключевые слова: неравенства, линейное программирование, симплекс-метод, метод Жордана–Гаусса, целевая функция, экстремум, матрица

INEQUALITIES METHOD IN THE LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

[1]Kravchuk S.P., [2]Kravchuk I.S., [1]Tatarnikov O.V., [1]Shved E.V.

[1]Plekhanov Russian University of Economics. Moscow, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

[2]Moscow State University of Railway Transport, Moscow

The goal of a number economical, finance and management problems is being the optimal decision making. One of the most common methods of solving of such problems is the simplex method, justified by a number of theorems. Often there is a need for researchers to more simply and clearly an alternative method for solving of linear programming problems. The proposed method possesses these features and, in addition, it does not require the appropriate theorem proving. The essence of this method is reduced to solving a system of the same sign inequalities, which transforms to a single inequality. One of the significant advantages of the method is the certainty in the quantity of algorithm steps. The proposed method can be used as for solving of economic problems and for verification of solutions obtained by the simplex method as well.

Keywords: inequality, linear programming, the simplex method, Gauss-Jordan method, the objective function, extremum, matrix

Используемый в работе метод решения задач линейного программирования был впервые предложен российским математиком С.Н. Черниковым [3]. Кратко суть его сводится к следующему: сначала все ограничения задачи, состоящие из уравнений и неравенств, приводятся к единой системе неравенств одного смысла. Равенство для целевой функции Z можно, как показано далее, также свести к неравенству. В итоге получится система линейных неравенств относительно $(n + 1)$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n, Z$ или n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и параметра Z. Далее последовательным исключением переменных по методу Жордана–Гаусса приводим систему неравенств к окончательному виду $Z\ m \le Z$ или $Z \le M$, где m, M $(m \le M)$ – некие числа. Отсюда находится $Z_{\min} = m$ или $Z_{\max} = M$. Подставляя после этого во все промежуточные неравенства вместо $Z\ m$ или M, можно последовательно найти значения всех переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, обеспечивающих экстремум целевой функции Z. При необходимости этим же способом можно найти границы изменения каждой переменной x_i.

В качестве примера рассмотрим решение системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ -2x_1 + x_2 \le 0 \\ -2x_1 - x_2 \le -4 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Процесс исключения будем оформлять в табл. 1 как при решении систем уравнений методом Жордана–Гаусса [1, 5].

Слева в строках записаны коэффициенты перед x_1 и x_2 для каждого неравенства системы. Значок ∇ указывает, что исключается x_2. Знак неравенства $\le$ между левой и средней частью таблицы подразумевается. Справа положительные цифры в кружках означают умножение на них неравенств-строк. Прямая, соединяющая два кружка, указывает на последующее сложение этих строк. Порядок выбираемых пар строк несущественен, но должны быть выбраны все возможные пары. В блоке II слева 1-я строка – результат первого сложения, 2-я строка – второго и т.д. Последняя 7-я строка повторяет 5-ю строку блока I, так как в ней также отсутствует x_2. Нули на месте исключённой x_2 не пишем. Можно также сократить строки блока II на положительные числа. В правой части блока II выписана система неравенств для x_1 в обычном виде. Её решение соответствует рис. 1.

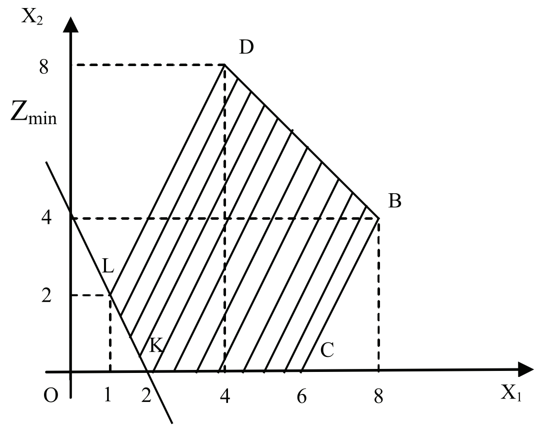


Рис. 1

Таблица 1

		x_1	x_2			
[I]			∇			
		1	1	12		
		2	−1	12		
	{11}	−2	1	0		$x_1 = 1: -2 + x_2 = 0,$
	{12}	−2	−1	−4		$\Rightarrow x_2 = 2$
		−1	0	0		
		0	−1	0		
[II]		$\cancel{3},1$		$\cancel{24},8$	$x_1 \le 8$	
		−1		8	$x_1 \ge -8$	
		1		12	$x_1 \le 12$	
		0		12	$0 < 12$	$\Rightarrow x_1 \in [1;8]$
	{1}	$-\cancel{4},-1$		$-\cancel{4},-1$	$x_1 \ge 1$	
		$-\cancel{2},-1$		0	$x_1 \ge 0$	
		−1		0	$x_1 \ge 0$	

Далее найдем значение x_2, отвечающие $x_{1\min} = 1$. Для этого подставим во все неравенства предыдущего блока I $x_1 = 1$. Получим:

$$\begin{cases} 1 & +x_2 & \le 12; \\ 2 & -x_2 & \le 12; \\ -2 & +x_2 & \le 0; \\ -2 & -x_2 & \le -4; \\ -1 & & \le 0; \\ & -x_2 & \le 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & \le 11; \\ x_2 & \ge -10; \\ x_2 & \le 2; \\ x_2 & \ge 2; \\ & \\ x_2 & \ge 0. \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2.$$

Нахождение x_2 можно заметно упростить. Для этого отметим цифрами {11} и {12} слева в блоке I те неравенства, которые формируют конечное неравенство $x_1 \ge 1$, отмеченное в блоке II цифрой {1} слева. Подставим в них $x_1 = 1$ и найдём x_2:

$$\begin{cases} -2 + x_2 \le 0; \\ -2 - x_2 \le -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \le 2; \\ x_2 \ge 2. \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2.$$

Ещё проще вместо этой системы решить одно из соответствующих уравнений, например:

$$-2 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Это решение записано в блоке I справа.

Линейные неравенства с *n* переменными. Сформулируем теперь общие правила нахождения наименьших и наибольших значений переменных в произвольной системе линейных неравенств одного знака:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Любое решение (2) принадлежит области пересечения всех полупространств, задаваемых неравенствами (2). Эта область допустимых решений является выпуклым n-мерным многогранником [1, 2]. Его можно рассматривать как общее множество точек пересечения всевозможных пар полупространств, так как если решение (x_1, x_3, ..., x_n) удовлетворяет каждой паре неравенств, то оно удовлетворяет всей системе пар (2), и наоборот. Отсюда следует, что проекция многогранника на координатную плоскость состоит из общих точек проекций пересечения каждой пары полупространств.

Проектирование пересекающейся пары полупространств, например, вдоль оси Ox_1 на плоскость $Ox_2x_3...x_n$, аналитически сводится к исключению переменной x_1 из пары соответствующих неравенств (2). Поэтому проекции всего многогранника на плоскость $Ox_2x_3...x_n$ отвечает система всех неравенств-следствий с исключённой переменной x_1. Проектируя далее полученную проекцию, т.е. исключая следующую переменную, получим систему неравенств-следствий с меньшим числом переменных. Очевидно, что на каждом этапе лучше исключать ту переменную, которая приведёт к меньшему количеству неравенств-следствий. Если удастся довести этот процесс до последней переменной, то найдём пределы её изменения. Затем, подставляя наименьшее или наибольшее значение этой переменной во все промежуточные системы и двигаясь снизу вверх, можно найти соответствующие значения остальных переменных.

Решение задач линейного программирования с ограничениями в виде системы неравенств. В самом общем случае задача линейного программирования выглядит так [1, 2]:

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l; \\ a_{l+11}x_1 + a_{l+12}x_2 + \ldots + a_{l+1n}x_n \le b_{l+1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Обычно к ограничениям (3) добавляют условия неотрицательности переменных: $x_i \ge 0$. Можно считать, что такие дополнительные неравенства в виде $-x_i \le 0$ также входят в систему неравенств (3). В симплекс-методе решения задач линейного программирования все ограничительные неравенства за счёт введения вспомогательных неотрицательных переменных переписывают в виде уравнений. В излагаемом же методе, наоборот, систему уравнений (3) следует преобразовать в систему неравенств. Для этого систему уравнений (3) сначала нужно методом Жордана–Гаусса привести к разрешённому виду, например, такому:

$$\begin{cases} x_1 + \quad \ldots \quad + a'_{1l+1}x_{l+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ \qquad x_2 + \ldots + a'_{2l+1}x_{l+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_l + a'_{ll+1}x_{l+1} + \ldots + a'_{ln}x_n = b'_l. \end{cases}$$

Отсюда выражаем разрешённые переменные:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1l+1}\,x_{l+1} - \ldots - a'_{1n}\,x_n; \\ x_2 = b'_2 - a'_{2l+1}\,x_{l+1} - \ldots - a'_{2n}\,x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l = b'_l - a'_{ll+1}\,x_{l+1} - \ldots - a'_{ln}\,x_n \end{cases}$$

и подставляем их в целевую функцию $Z(x_1, x_2, ..., x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_n)$ и во все неравенства (3). В итоге приходим к задаче линейного программирования с меньшим числом $n - 1$ переменных, удовлетворяющих только системе неравенств. Далее равенство для целевой функции заменяем линейным неравенством с параметром Z или с дополнительной переменной $x_{n+1} = Z$. В задачах на минимум $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \le Z$, а в задачах на максимум $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \ge Z$. Окончательно задачи на минимум и на максимум примут вид:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \le Z - c_0; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ Z_{\min} = ? \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \le -Z + c_0; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ Z_{\max} = ? \end{cases} \tag{5}$$

Следующий пример, взятый из [4], интересен тем, что симплексный метод его решения может привести к зацикливанию. При решении же методом неравенств (исключений) никаких особенностей не наблюдается.

$$Z(X) = x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0; \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0; \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1; \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,7} \end{cases} \tag{6}$$

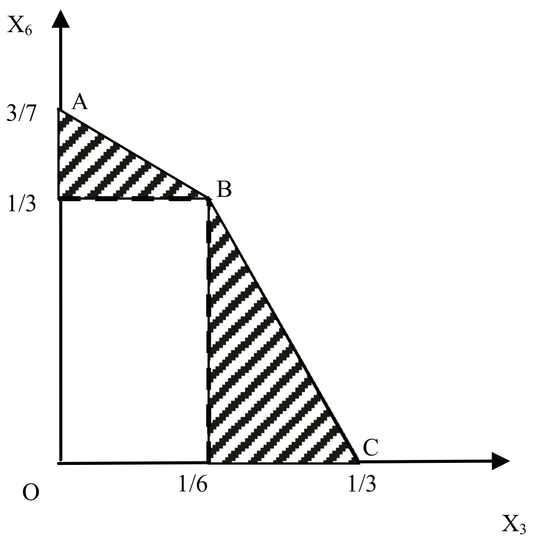


Рис. 2

Отбрасывая здесь неотрицательные разрешённые переменные x_1, x_2, x_7, приведём (6) к виду системы неравенств (5):

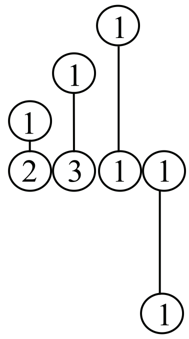
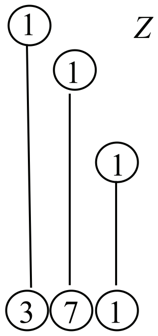
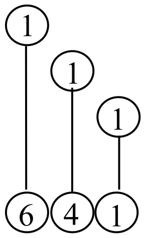
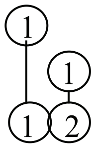
$$\begin{cases} -x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \le -Z; \\ x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 \le 0; \\ 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 \le 0; \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 1; \\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ge 0; \\ Z_{\max} = ? \end{cases} \tag{7}$$

Решением правой части системы неравенств блока II является четырёхугольник *ABCO* на рис. 2. Координаты любой его точки находятся через координаты его вершин $A\left(0;\frac{3}{7}\right)$, $B\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{3};0\right)$, $O(0;\ 0)$ по формуле (1), (6):

$$\left(x_3, x_6\right) = \alpha\cdot\left(0;\frac{3}{7}\right) + \beta\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right) + \gamma\left(\frac{1}{3};0\right) + \delta\left(0;0\right);$$

где $0 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le 1$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.

Таблица 2

	x_3	x_4	x_5	x_6			
$\{11111\}$	-1	1	∇ -1	-1	$-Z$		
	1	-2	-3	4	0		
	4	-3	-2	1	0		
$\{11112\}$	1	1	1	1	1		$x_3 + x_5 + x_6 = 1$
[I]	-1	0	0	0	0		$\Rightarrow x_5 = 1 - x_3 - x_6$
$\{12111\}$	0	-1	0	0	0		
	0	0	-1	0	0		
	0	0	0	-1	0		
	6	-1		3 ∇	2		$Z = 1, x_4 = 0, x_3 \in [0;1/3]$
	4	1		7	3		$\begin{cases} 6x_3 + 3x_6 \le 2; \\ 4x_3 + 7x_6 \le 3; \\ x_3 + x_6 \le 1; \\ x_6 \ge 0. \end{cases}$
$\{1111\}$	0	2		0	$1-Z$		
[II]	1	1		1	1		
	-1	0		0	0		
$\{1211\}$	0	-1		0	0		
	0	0		-1	0		
	∇ 6	-1			2		$Z = 1,0; x_4 =$
	4	1			3		$\begin{cases} x_3 \le 2/6; \\ x_3 \le 3/4; \\ x_3 \le 1; \quad \Rightarrow x_3 \in [0;1/3] \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
	1	1			1		
[III] $\{111\}$	0	2			$1-Z$		
	-1	0			0		
$\{121\}$	0	-1			0		
	-1 ∇				2		
	1				3		$Z = 1:$
[IV]	1				1		$x_4 = 0$
$\{11\}$	2				$1-Z$		
$\{12\}$	-1				0		
[V]	0				1	$0 < 1$ $\Rightarrow Z_{\max} = 1$	
$\{1\}$	0				$1-Z$	$Z \le 1$	

Отсюда:

$$x_3 = \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{3}\gamma; \quad x_6 = \frac{3}{7}\alpha + \frac{1}{3}\beta; \quad \alpha + \beta + \gamma \le 1. \tag{8}$$

Согласно правой стороне блока I:

$$x_5 = 1 - x_3 - x_6 = 1 - \frac{3}{7}\alpha \frac{1}{2}\frac{1}{3}\beta - -\gamma. \tag{9}$$

Из (7) с учетом (8), (9) и $x_4 = 0$ находятся остальные переменные:

$$x_1 = 3 - 3\alpha - 3\beta - \frac{4}{3}\gamma;$$

$$x_2 = 2 - \frac{9}{7}\alpha - 2\beta - 2\gamma;$$

$$x_7 = 0.$$

Список литературы

1. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2010.

2. Юдин Д.Б., Гольдштейн Е.Г. Линейное программирование. – М.: Красанд, 2012.

3. Черников С.Н. Решение задач линейного программирования методом исключения неизвестных. – ДАН, 139, 1314–1317, 1961.

4. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. –М.: Наука – Физматлит, 2007.

References

1. General Course of Higher Mathematics for Economists. Textbook ed. V.I. Ermakov. M: INFRA-M, 2010.

2. Yudin D.B., Goldstein E.G. Linear Programming. M.: Krasand 2012.

3. Chernikov S.N. Solution of Llinear Programming Problems by Eliminating of the Unknowns. USSR Academy of Science Reports, 139, 1314–1317, 1961.

4. Zaslavsky J.L. Book of Linear Programming Problems. M: Nauka, 1969.

5. Ilyin V.A., Poznyak E.G. Linear Algebra. M.: Science Fizmatlit, 2007.

Рецензенты:

Туганбаев А.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского университета МЭИ, г. Москва;

Титов В.А., д.э.н., профессор, начальник отделения факультета математической экономики и информатики РЭУ им. В.Г. Плеханова, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 31.01.2014.