

УДК 519.684.6

КРИТЕРИЙ ПРИМЕНИМОСТИ ДЕЛЬТА-ОПЕРАТОРА ПРИ СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Каримов Т.И., Бутусов Д.Н., Каримов А.И.

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», Санкт-Петербург, e-mail: butusovdn@mail.ru

Статья посвящена исследованию критериев, определяющих границы применимости дельта-оператора при моделировании дискретных линейных динамических систем, представленных в форме пространства состояний. Сформулирован простой критерий предпочтительности дельта-оператора на основе анализа моделей звеньев первого и второго порядка. Разработанный критерий базируется на анализе расположения корней характеристического полинома моделируемой системы и позволяет оценить возможность улучшения точности машинного представления коэффициентов матриц пространства состояний системы при применении дельта-оператора, а также исключить те случаи, в которых применение дельта-оператора заведомо не является целесообразным. Приведены примеры оценки типовых моделей динамических систем с помощью предлагаемого критерия и сделаны выводы о направлениях дальнейших исследований, а также практического применения и внедрения полученных авторами результатов.

Ключевые слова: дельта-оператор, оператор сдвига, цифровые системы управления, дискретные динамические системы, пространство состояний

THE CRITERION OF DELTA-OPERATOR APPLICATION IN STATE SPACE DIGITAL SYSTEMS DESIGN

Karimov T.I., Butusov D.N., Karimov A.I.

Saint-Petersburg State Electrotechnical University, St. Petersburg, e-mail: butusovdn@mail.ru

The paper is dedicated to the delta operator – a less-known, alternative to the shift operator way to build discrete dynamical system models. The research of delta operator applicability domain for the state space discrete dynamic systems is described. The simple delta operator preference criterion based on 1st and 2nd order system pole loci is stated. Described criterion allows to evaluate the capability of delta operator to improve state space matrix computer representation and to discard cases when delta operator application is trivially not appropriate. The examples of delta-operator application to the discrete dynamical systems are shown as a variety of MATLAB models.

Keywords: delta operator, shift operator, digital control systems, discrete dynamical systems, state-space models

Дискретные динамические системы, в частности цифровые фильтры и системы управления, в настоящее время, как правило, реализуются с применением оператора сдвига, связанного с широко известным z-преобразованием. Данный оператор, несмотря на широкое распространение, не всегда хорошо подходит для реализации дискретных систем на вычислительных машинах с ограниченной длиной разрядной сетки. Сопутствующие негативные эффекты особенно ярко выражены при высоких частотах дискретизации системы. Это накладывает ограничения на применение оператора сдвига при моделировании высокочастотных, разноразрядных или жестких динамических систем, делая в некоторых случаях их цифровую реализацию невозможной.

Для решения обозначенной проблемы был введен δ -оператор. Системы на основе δ -оператора малочувствительны к высокой частоте дискретизации, а также обладают рядом других важных свойств. Например, при стремлении периода дискретизации к нулю дискретная система на основе

δ -оператора переходит в эквивалентную ей непрерывную [1]. В последние двадцать лет число публикаций по теме δ -оператора устойчиво растет. Краткий обзор научных работ последних лет показывает широкие возможности δ -оператора и его пригодность к применению в различных областях техники [1, 4, 6].

Почему же δ -оператор до сих пор не получил повсеместного распространения? Объективная причина этого лежит в отсутствии четко сформулированных критериев предпочтительности применения δ -оператора в той или иной задаче, поскольку характеристики системы при замене оператора сдвига на δ -оператор улучшаются далеко не всегда. Подавляющее большинство работ посвящено применению δ -оператора в частных случаях; некоторые публикации посвящены авторским модификациям δ -оператора [3, 5]. Однако работ, в которых указывались бы критерии применимости δ -оператора, нами найдено не было. Настоящая статья имеет своей целью устранение данного недостатка.

Определение δ -оператора

Воспользуемся аппроксимацией Эйлера для вычисления производной:

$$\delta u[k] = \frac{u([k+1]\Delta) - u([k]\Delta)}{\Delta} \approx \left. \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|_{u=u(k\Delta)} = su(t), \quad (1)$$

где $\Delta = T$ – период дискретизации. Как эквивалент оператора s , введем оператор δ , который имеет следующий смысл:

$$\delta u[k] = \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} \approx su(t). \quad (2)$$

$$\delta u[k] = \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} = \frac{zu[k] - u[k]}{\Delta} \Rightarrow \delta = \frac{z-1}{\Delta} \Rightarrow z = 1 + \Delta\delta. \quad (4)$$

Начальные условия при этом считаются нулевыми.

Описание дискретной динамической системы в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + Bu[n]; \\ y[n] = C\mathbf{x}[n] + Du[n]. \end{cases} \quad (5)$$

Собственные числа дискретной системы при уменьшении периода дискретизации стремятся к единице [1]. Отсюда следует, что матрица A дискретного пространства состояний стремится к единичной матрице. Так, для системы второго порядка

$$A \xrightarrow{T \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Этот эффект приводит к появлению существенного разброса между близкими к единице диагональными коэффициентами матрицы и недиагональными, близкими к нулю, что вызывает трудности при машинном представлении матрицы A . Ее коэффициенты как бы скапливаются в разных концах разрядной сетки, оставляя середину пустой. В результате происходит заметная потеря точности моделирования. Это справедливо и для арифметики с плавающей запятой, так как экспонента диагональных коэффициентов при малых периодах дискретизации всегда равна единице, а для представления мантиссы используется ограниченное число разрядов.

Эту трудность можно частично разрешить, если применить δ -оператор. В дискретном пространстве состояний система на основе δ -оператора определяется следующим образом:

По определению оператора сдвига

$$u[k+1] = zu[k]. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует связь между операторами δ и z :

$$\begin{cases} \delta[n] = A_\delta \mathbf{x}[n] + B_\delta u[n]; \\ \mathbf{x}[n+1] = \mathbf{x}[n] + h \delta[n]; \\ A_\delta = \frac{(A - I)}{\Delta}; \\ B_\delta = \frac{B}{\Delta}. \end{cases} \quad (7)$$

На основании формулы (4) должно выполняться условие $\Delta = T$. Однако это условие не обязательно; Δ можно интерпретировать как дополнительный параметр дискретной системы. С одной стороны, он позволяет масштабировать переменные состояния, с другой – его можно подобрать таким образом, чтобы минимизировать цифровой шум модели [2]. Он также влияет на коэффициенты модели, что особенно важно при создании моделей в арифметике с фиксированной запятой. Обычно полагают, что $\Delta \in (0; 1]$. В работах [1, 2] рекомендуется выбирать в качестве Δ число, равное 2^m ; это упрощает аппаратную реализацию и делает погрешность представления Δ на цифровом вычислителе равной нулю. Кроме того, выбор Δ как степени двойки упрощает задачу оптимизации, которую необходимо решить при выборе значения Δ .

Исследование системы первого порядка

Рассмотрим одномерную систему, описываемую следующим уравнением:

$$\dot{x} = ax. \quad (8)$$

Чтобы данная модель была физически реализуема, коэффициент a должен быть вещественным. Пусть T – период дискретизации. Исследуем, при каком значении aT для модели (8) большую точность будет давать обычное z -преобразование, а для каких – δ -преобразование. Применив к (8)

линейный оператор билинейного преобразования

$$L_{tr} = \frac{(1 - aT/2)}{(1 + aT/2)}, \quad (9)$$

получим дискретную модель

$$x[n+1] = a_z x[n];$$

$$a_z = \frac{(2 - aT)}{(2 + aT)}. \quad (10)$$

График зависимости a_z от aT приведен на рис. 1. Это гипербола, левая ветвь которой монотонно убывает. Правее нуля находится область неустойчивости метода трапеций, поэтому рассматривать поведение графика в этой области не имеет смысла.

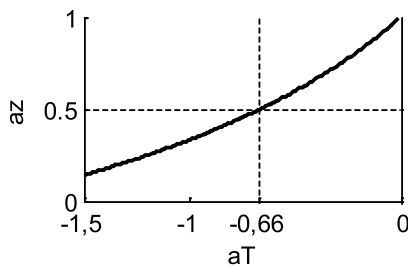


Рис. 1. График зависимости a_z от aT

Эквивалентная (8) δ -модель такова:

$$\begin{cases} \delta[n] = a_\delta x[n], \\ x[n+1] = x[n] + h\delta[n]; \end{cases}$$

$$a_\delta = \frac{a_z - 1}{\Delta}.$$

Обратим внимание, что, так как Δ равно степени числа 2, то оно никак не влияет на точность машинного представления a_δ . Примем для простоты, что $\Delta = 1$. Хотя погрешность машинного представления a_z и a_δ имеет «пилообразный» вид, по графику на рис. 1 можно достаточно точно описать поведение этой погрешности. Дельта-модель будет иметь в целом меньшую погрешность при

$$aT \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right), \quad (11)$$

поскольку в этом случае a_z ближе к 1, а $a_\delta = a_z - 1$, соответственно, ближе к 0, и точка $aT = -\frac{2}{3}$ задает границу областей пред-

почтительности операторов: $|a_\delta| = |a_z| = 0,5$.

Рис. 2 демонстрирует результаты численного эксперимента над моделью с представлением данных с плавающей запятой при точности представления single (32 бита, мантисса 23 бита), подтверждающие описанный выше характер погрешности. На графиках изображены модули абсолютной погрешности $E_z = [a_z]_{\text{single}} - a_z$ и $E_\delta = [a_\delta]_{\text{single}} - a_\delta$ в логарифмическом масштабе, где $[a_z]_{\text{single}}$ и $[a_\delta]_{\text{single}}$ – машинные представления коэффициентов a_z и a_δ при точности single в сравнении с коэффициентами точности double.

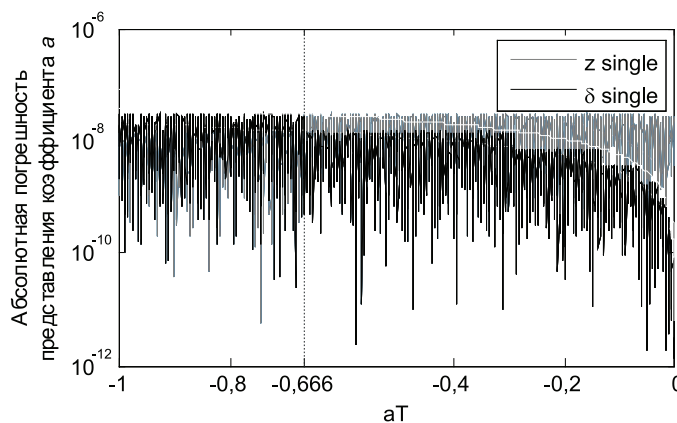


Рис. 2. График погрешностей машинного представления коэффициентов

Вертикальным пунктиром на рис. 2 отмечена линия $aT = -\frac{2}{3}$, белой линией – верхняя оценка погрешности $[a_\delta]_{\text{single}}$, выполняемая на интервале $[-1; 0)$ по формуле

$$E_{\delta\max} = \epsilon \cdot |a_\delta|, \quad (12)$$

где ϵ – машинный эпсилон для числа $\frac{1}{2}$, то есть значение младшего бита мантиссы $[a_\delta]$ при неизменном значении экспоненты. Для

чисел с фиксированной запятой ε – просто минимальное число на текущей разрядной сетке. В данном случае $\varepsilon = 5,96 \cdot 10^{-8}$.

Погрешности E_{δ} убывают ступенчато, уменьшаясь каждый раз, когда мантисса представления a_{δ} получает дополнительный двоичный разряд по сравнению с представлением a_z . Это происходит при достижении a_{δ} значений: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \dots$

Верхняя оценка погрешности машинного представления a_z на интервале $[-1; 0)$ равна

$$E_{z \max} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) дают простой способ оценить выигрыш в точности представления коэффициентов δ -модели независимо от типа данных и разрядности машинного слова:

$$\frac{E_{\delta \max}}{E_{z \max}} = 2|a_{\delta}|. \quad (14)$$

Исследование системы второго порядка

Рассмотрим теперь системы второго порядка с комплексно-сопряженными собственными значениями $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$, которые могут быть представлены в форме пространства состояний с действительной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матрица A с помощью линейного преобразования переходит в матрицу A_z , которой соответствует матрица эквивалентной δ -модели A_{δ} :

$$A_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & \omega_z \\ -\omega_z & \sigma_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{\delta} = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta} & \omega_{\delta} \\ -\omega_{\delta} & \sigma_{\delta} \end{pmatrix};$$

$$\sigma_{\delta} = \sigma_z - 1; \quad (16)$$

$$\omega_{\delta} = \omega_z, \quad (17)$$

при $\Delta = 1$. Погрешность машинного представления ω_{δ} и ω_z одинакова и уменьшается с уменьшением шага дискретизации; соотношения же верхних оценок погрешностей машинного представления σ_{δ} и σ_z те же, что и в предыдущем случае:

$$\frac{E_{\delta \max}}{E_{z \max}} = 2|\sigma_{\delta}|.$$

На рис. 3 изображен фрагмент поля комплексных чисел $\lambda T = \sigma T + i\omega T$, на который нанесены значения $\log_2 \frac{|E_{\delta}|}{|E_z|}$, отражающие количественное превосходство

точности машинного представления σ_{δ} по сравнению с машинным представлением σ_z . Область, в которой дельта-оператор демонстрирует не менее высокую точность, чем z -оператор, может быть аппроксимирована частью эллипса с центром в точке 0 и полуосями (0,66; 1,15), лежащей в левой комплексной полуплоскости. Обозначим P_{δ} – область предпочтительности δ -оператора. Эксперименты показывают, что внутри указанного эллипса коэффициенты системы на основе δ -оператора не менее точны в 97% случаев (причем $|E_{\delta}| > |E_z|$ только на границе P_{δ} из-за неточности аппроксимации действительной области предпочтительности эллипсом). Однако условие $|E_{\delta}| = |E_z|$ выполняется в 35% точек внутри P_{δ} . Обозначим R_{δ} – сильная область предпочтительности, где $|E_{\delta}| < |E_z|$ в 95% точек. Для системы второго порядка R_{δ} может быть аппроксимирована частью эллипса с центром в точке 0 и полуосями (0,09; 0,16). Для системы первого порядка R_{δ} – отрезок на действительной оси $(-0,09; 0)$.

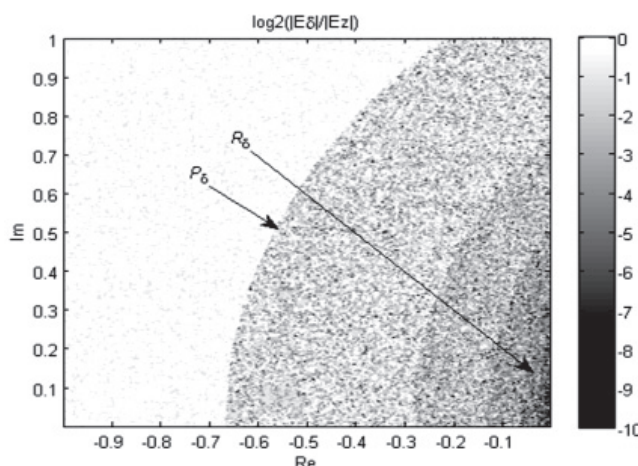


Рис. 3. Машинное представление σ_{δ} по сравнению с машинным представлением σ_z

Критерии предпочтительности δ -оператора

При синтезе дискретной модели исходной непрерывной системы следует руководствоваться следующим. Если $\lambda T \in P_\delta$, где λ – собственное число (полнос) системы, T – период дискретизации, P_δ – слабая область предпочтительности δ -оператора, то его применение дает не меньшую точность представления коэффициентов системы, чем применение z -оператора. При использовании билинейного преобразования для синтеза системы в форме пространства состояний слабые области предпочтительности имеют вид:

1. Для системы первого порядка P_δ – отрезок на действительной оси $(-0,66; 0)$.

2. Для системы второго порядка P_δ может быть аппроксимирована с доверительной вероятностью 97% частью эллипса с центром в точке 0 и полуосями (0,66; 1,15), лежащей в левой комплексной плоскости.

Если $\lambda T \in R_\delta$, где R_δ – сильная область предпочтительности δ -оператора, то его применение дает большую точность представления коэффициентов системы в 95% случаев, чем применение z -оператора. При использовании билинейного преобразования для синтеза системы в форме пространства состояний сильные области предпочтительности имеют вид:

1. Для системы первого порядка R_δ – отрезок на действительной оси $(-0,09; 0)$.

2. Для системы второго порядка R_δ может быть аппроксимирована частью эллипса с центром в точке 0 и полуосями (0,09; 0,16).

Заключение

В работе исследуются границы применимости δ -оператора к дискретным линейным динамическим системам в форме пространства состояний при использовании для их синтеза билинейного преобразования. Введены понятия сильной и слабой областей предпочтительности δ -оператора. Сформулирован простой критерий предпо-

чительности δ -оператора для звеньев первого и второго порядка, основанный на исследовании их полюсов. Данный критерий позволяет оценить, возможно ли повысить точность машинного представления системы при применении δ -оператора. Предметом дальнейшего исследования является формулировка критерия предпочтительности для динамических систем в форме передаточных функций, а также при использовании арифметики с фиксированной запятой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках договора № НК 14-01-31277\14 от 06.02.2014 г.

Список литературы/ References

1. Collins E.G., Jr; Song T. A delta operator approach to discrete-time H_∞ control // International Journal of Control. – 1999. – 72, № 4. – P. 315–320.
2. Kauraniemi J., Laakso T.I. Elimination of limit cycles in a direct form delta operator filter, EUSIPCO – 96 Trieste, Italy. – Sept. 10–13, 1996. – Vol. 1. – P. 57–60
3. Kauraniemi J., Laakso T.I., Hartimo I. and Ovaska S.J. Delta operator realization of direct-form IIR filters // IEEE Trans. Circuits Syst. – 1998. – Vol. 45. – P. 41–51.
4. Liu Y., Wang Y., Gao Z., and Dou C. Optimal sliding mode control for delta operator system // IEEE 32nd Chinese Control Conference. – 2013. – P. 3152–3157.
5. Torres C., Gimenez V., Monasterio F. Linear continuous system discretization using a new general delta operator // ICARCV. – 2002, 2-5 Dec. – Vol.3. – P. 1513–1516.
6. Yang H., Shi P., Li Z., and Hua C. Analysis and design for delta operator systems with actuator saturation // International Journal of Control. – 2014. – 87, № 5. – P. 987–999.

Рецензенты:

Авдеев Б.Я., д.т.н., профессор кафедры информационно-измерительных систем и технологий, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург;

Анисимов В.И., д.т.н., профессор кафедры систем автоматизированного проектирования. ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.

Работа поступила в редакцию 28.12.2014.