УДК 378

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ БУДУЩИМИ БАКАЛАВРАМИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Самсонова С.А.

Филиал ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова», Коряжма, e-mail: s.samsonova-safu@yandex.ru

В статье рассмотрены возможности применения математического пакета Mathcad при изучении теории случайных процессов в рамках дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для бакалавров прикладной математики и информатики. Цель освоения содержания данного курса – развитие понятийной теоретико-вероятностной базы и формирование у студентов соответствующего уровня статистической и информационной культуры, необходимого для понимания основ теории случайных процессов, а также её применения к моделированию реальных процессов. Автором обоснована необходимость изучения данного курса с использованием информационных технологий. Приведен конкретный пример моделирования из раздела «Цепи Маркова». Выделены общекультурные и профессиональные компетенции, формируемые у студентов в результате освоения данного модуля.

Ключевые слова: информационные технологии, Mathcad, случайные процессы, компетенции

APPLICABILITY OF INFORMATION TECHNOLOGY IN STUDIES OF THEORY OF RANDOM PROCESSES FOR FUTURE BACHELORS OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Samsonova S.A.

Koryazhma Branch of Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Koryazhma, e-mail: s.samsonova-safu@yandex.ru

The article discusses the possibility of using mathematical package Mathcad in the study of the theory of random processes as part of the discipline «Theory of Probability and Mathematical Statistics» for Bachelors of Applied Mathematics and Computers Science. The purpose of the research of the course content is to develop conceptual-theoretical probabilistic basis and formation of students' appropriate level of statistical information culture necessary to understand the foundations of the Theory of Random Processes, and its application to modeling of real processes. The author proves necessity of this course with the use of information technology. The concrete example of «Markov's Chain» simulation is also given by the author. Common cultural and professional competences which are to be formed in students as a result of the development of this module are highlighted.

Keywords: information technology, Mathcad, random processes, competences

Случайные процессы являются моделями многих реальных процессов и занимают значительное место в современных прикладных исследованиях. Теория случайных процессов находит широкое применение: в радио- и электротехнике, кибернетике; в математической экономике и математической биологии, в молекулярной теории газов и др. Раздел, посвященный теории случайных процессов, имеется в рамках курса «Теория вероятностей и математическая статистика», который входит в базовую часть профессионального цикла (Б.3) ООП бакалавриата по направлению подготовки 010400.62 «Прикладная математика и информатика» [4].

Целью освоения модуля «Теория случайных процессов» является фундаментальная подготовка бакалавров в области построения и анализа различных стохастических моделей, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования его в прикладных исследованиях.

Современный этап развития общества, характеризующийся всеобщей информатизацией, непрерывной сменой технологий, постоянным изменением структуры и содержания информационных ресурсов, в значительной мере повышает требования к информационной подготовке будущего бакалавра. При изучении теории случайных процессов решение многих задач значительно упрощается с использованием математических пакетов.

В работах [5–7] описаны возможности применения компьютера при обучении студентов теории вероятностей и математической статистике.

Среди множества программных продуктов можно выделить такие системы компьютерной математики, как MathCad, Matlab, Mathematica, Maple и др. Все они обладают широкими возможностями для решения задач различных классов, имеют большое число встроенных функций, средства символьных преобразований, анимации и визуализации.

Выбор нами среды MathCad для изучения теории вероятностей и математической статистики обусловлен ее специфическими возможностями [5–7]. Важнейшей такой возможностью является то, что система позволяет генерировать выборки распределенных с произвольными параметрами случайных величин. Благодаря этому, мы имеем возможности для модуляции различных случайных процессов. Кроме того, в Mathcad к сгенерированным случайным процессам достаточно легко применять статистические методы обработки данных (например, строить гистограммы, производить спектральный и корреляционный анализ).

На основе источников [1–3] нами разработан лабораторный практикум по теории вероятностей и математической статистике, предполагающий использование данного пакета в качестве среды для моделирования. В качестве примера использования MathCad при изучении теории случайных процессов выберем один из наиболее значимых разделов дисциплины – «Цепи Маркова» – и решим следующую типовую задачу.

Пусть начальное распределение вероятностей состояний цепи Маркова задано вектором $a^{(0)} = (0, 0, 0, 1)$, а матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Вычислить: вероятности состояний цепи Маркова в течение 5 шагов; безусловные вероятности состояний цепи Маркова на 5-м шаге, а также номер интервала, в котором содержится число 1. Найти частоты различных состояний в m траекториях цепи, каждая из которых содержит n шагов.

Решение. Введем матрицу переходных вероятностей P и вектор вероятностей состояний на нулевом шаге a:

$$P := \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}; \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Затем введем функцию Pr(a, P, n), позволяющую вычислять вероятности состояний цепи Маркова в течение n шагов:

$$\Pr(a,P,n) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \mathrm{rows}(P) \\ \text{for } i \in 1 \ldots k \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{i,0} \leftarrow i \\ A_{i,1} \leftarrow a_{i-1} \end{array} \right. \\ \text{for } t \in 1 \ldots n+1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{0,t} \leftarrow t-1 \\ b \leftarrow a^T \cdot P^{t-1} \\ \text{for } i \in 1 \ldots k \\ \quad A_{i,t} \leftarrow \left(b^T\right)_{i-1} \end{array} \right. \\ A \end{array} \right.$$

При $n = 5$ имеем

$$\Pr(a, P, 5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}06 & 0{,}084 & 0{,}106 & 0{,}12 \\ 2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}11 & 0{,}135 & 0{,}147 & 0{,}157 \\ 3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}34 & 0{,}438 & 0{,}507 & 0{,}555 \\ 4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}49 & 0{,}343 & 0{,}24 & 0{,}168 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получили матрицу, строки которой соответствуют номерам состояний (они указаны в нулевой строке), а столбцы соответствуют номерам шагов, которые указаны в нулевом столбце.

К примеру, вероятности состояний на втором шаге равны: для первого 0,06, второго 0,11, для третьего 0,34 и четвертого – 0,49.

Безусловные вероятности $a_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(0)} \cdot p_{i,j}^{(n)}$, $(n = 1,2,\ldots)$ состояний цепи Маркова на n-м шаге найдем с помощью функции UnPr(a, P, n) (a – это вектор вероятностей состояний на нулевом шаге):

$$Un\Pr(a, P, n) := a^T \cdot P^n.$$

При $n = 5$

$$Un\Pr(a, P, 5) := (0{,}12 \;\; 0{,}157 \;\; 0{,}555 \;\; 0{,}168).$$

Теперь введем функцию Def(a, x), которая позволяет определять номер интервала i, содержащего число x:

$$\mathrm{Def}(a,x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow a_0 \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } s < x \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i+1 \\ s \leftarrow s + a_i \end{array} \right. \\ i \end{array} \right.$$

Для $x = 1$

$$\mathrm{Def}(a, 1) = 3.$$

С помощью функции Ch(a, P, n, m) вычислим частоты различных состояний в m траекториях цепи, причем каждая из них содержит n шагов.

Детерминированное моделирование цепи Маркова в течение n шагов осуществляет функция ModCh(a, P, n, RN), выдавая одну траекторию для заданного вектора RN.

В качестве входных переменных при этом используются:

1) вектор a, который определяет начальное распределение вероятностей состояний цепи;

2) матрица P вероятностей переходов между состояниями за шаг;

3) вектор RN, содержащий $(n + 1)$ компонент RN_i $(RN_i < 0 < 1)$, использующихся для определения состояний цепи Маркова на различных шагах.

Заметим при этом, что RN_0 применяется для выработки начального состояния цепи в соответствии с распределением a, остальные же компоненты – для выработки состояний на шагах 1, 2,…, n. Данная функция используется в модуле, который реализует основную функцию ImModCh(a, P, n, m), генерирующую значение вектора RN (m – число моделируемых траекторий). Этот модуль позволяет осуществлять имитационное моделирование цепи Маркова в течение n шагов. Функция ImModCh() в качестве результата возвращает матрицу, строки которой соответствуют номеру шага, а столбцы – номеру реализации. На пересечении строки и столбца – номер состояния на данном конкретном шаге в соответствующей реализации.

$$\mathrm{ModCh}(a,P,n,RN) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \mathrm{Def}\left(\mathrm{a}, RN_0\right) \\ X_0 \leftarrow i \\ \text{for } t \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{a}i \leftarrow \left(P^T\right)^{\langle i \rangle} \\ i \leftarrow \mathrm{Def}\left(\mathrm{ai}, \mathrm{RN}_t\right) \\ X_t \leftarrow i \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

$$\mathrm{ImModCh}(a,P,n,m) := \left| \begin{array}{l} \mathrm{num} \leftarrow (n+1)\cdot m \\ \mathrm{RR} \leftarrow \mathrm{runif}(\mathrm{num}, 0, 1) \\ \text{for } r \in 0..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{to} \leftarrow r \cdot (n+1) \\ \text{for } t \in 0..n \\ \quad \mathrm{RN}_t \leftarrow \mathrm{RR}_{to+t} \\ X^{\langle r \rangle} \leftarrow \mathrm{ModCh}(a,P,n,RN) \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Ch}\,(a,P,n,m) := \left| \begin{array}{l} X \leftarrow \mathrm{ImMo\,dMCh}\,(a,P,n,m) \\ k \leftarrow \mathrm{rows}\,(P) \\ \text{for } t \in 0 \ldots n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0 \ldots k-1 \\ \quad \mathrm{Fr}_{t,i} \leftarrow 0 \\ \text{for } r \in 0 \ldots m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow X_{t,r} \\ \mathrm{Fr}_{t,i} \leftarrow \mathrm{Fr}_{t,i} + \dfrac{1}{m} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \mathrm{Fr}^{T} \end{array} \right.$$

Присвоив значения: $n = 5$, $m = 10000$, получим

$$Ch(a,\ P, 5, 10000) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}062 & 0{,}085 & 0{,}107 & 0{,}122 \\ 0 & 0{,}106 & 0{,}112 & 0{,}137 & 0{,}148 & 0{,}155 \\ 0 & 0{,}199 & 0{,}335 & 0{,}435 & 0{,}503 & 0{,}551 \\ 1 & 0{,}695 & 0{,}491 & 0{,}343 & 0{,}242 & 0{,}172 \end{pmatrix}.$$

Как видим, применение математического пакета позволило нам избежать рутинных вычислений, значительно сократить время, затраченное на решение задачи, и при этом получить результат с достаточно высокой степенью точности.

К достоинствам решения исследовательских учебных задач в компьютерной среде следует отнести предоставленные пользователю возможности варьировать параметры в задаче в достаточно широких пределах и при необходимости манипулировать математическими моделями случайных процессов. При этом необходимо отметить, что использование компьютера не заменяет традиционные средства обучения, а дополняет их, являясь элементом системы средств обучения, ориентированной на использование информационных технологий.

Известно, что успешная профессиональная подготовка будущих бакалавров предполагает реализацию системы общепрофессиональных и профессиональных компетенций обучающихся. Изучение теории случайных процессов с использованием информационных технологий обеспечивает инструментарий формирования следующих общекультурных и профессиональных компетенций подготовки бакалавра «Прикладная математика и информатика»:

– способность использовать в научной и познавательной деятельности, а также в социальной сфере профессиональные навыки работы с информационными и компьютерными технологиями (ОК-14);

– способность работы с информацией из различных источников, включая сетевые ресурсы сети Интернет, для решения профессиональных и социальных задач (ОК-15);

– способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);

– способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ПК-2);

– способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-3);

– способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);

– способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам (ПК-7).

Таким образом, внедрение информационных технологий в учебный процесс при изучении теории случайных процессов создает благоприятные условия для эффективного обучения студента в информационно-образовательной среде; у будущих бакалавров углубляются фундаментальные и прикладные знания, развиваются творческие способности, самостоятельность, вероятностное мышление, математическая и информационная культура.

Список литературы

1. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 461 с.

2. Дьяконов В.П. Mathcad 2001: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001.– 624 с.

3. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб: BHV, 2009. – 512 с.

4. Приказ Минобрнауки РФ от 20.05.2010 № 538 (ред. от 31.05.2011) «Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика (квалификация (степень) «бакалавр»)».

5. Самсонова С.А. Обучение стохастике студентов университетов // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. – 2010. – № 12. – С. 201–206.

6. Самсонова С.А. Методическая система использования информационных технологий при обучении стохастике: монография. – Архангельск: Поморский госуниверситет, 2004. – 249 с.

7. Самсонова С.А. Применение пакета Mathcad при обучении стохастике // Успехи современного естествознания. – 2006. – № 10 – С. 80–81.

References

1. Andronov A.M., Kopitov E.A., Gringlaz L.Ya. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika Uchebnik dlya vuzov. SPb. Piter, 2004. 461 p.

2. Dyakonov V.P. Mathcad 2001. Uchebnii kurs. SPb. Piter, 2001. 624 p.

3. Ochkov V.F. Mathcad 14 dlya studentov i injenerov_ russkaya versiya. SPb. BHV, 2009. 512 p.

4. Prikaz Minobrnauki RF ot 20.05.2010 no. 538 (red. ot 31.05.2011) «Ob utverjdenii i vvedenii v deistvie federalnogo gosudarstvennogo obrazovatelnogo standarta visshego professionalnogo obrazovaniya po napravleniyu podgotovki 010400 Prikladnaya matematika i informatika (kvalifikaciya (stepen) «bakalavr»)».

5. Samsonova S.A. Obuchenie stohastike studentov universitetov. Izvestiya Yujnogo federalnogo universiteta. Pedagogicheskie nauki. 2010, no. 12, pp. 201–206.

6. Samsonova S.A. Metodicheskaya sistema ispolzovaniya informacionnih tehnologii pri obuchenii stohastike. Monografiya. Arhangelsk. Pomorskii gosuniversitet. 2004, 249 p.

7. Samsonova S.A. Primenenie paketa Mathsad pri obuchenii stohastike. Uspehi sovremennogo estestvoznaniya. 2006, no. 10, pp. 80–81.

Рецензенты:

Попов В.Н., д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой математики, ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова», г. Архангельск;

Сотникова О.А., д.п.н., доцент, проректор Ухтинского государственного технического университета, г. Ухта.

Работа поступила в редакцию 16.12.2014.