УДК 615.035.4

# ПРОСТЕЙШИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЖЁСТКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

**Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю.**

*ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», Москва, e-mail: avtor@disper.ru*

Предлагается простейший метод решения жёстких краевых задач. Не требуется процедуры ортонормирования, что достигается за счёт разделения интервала интегрирования на сопрягаемые участки. Изложение даётся на примере системы дифференциальных уравнений цилиндрической оболочки ракеты – системы обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка (после разделения частных производных методом Фурье). Отсутствие необходимости применять ортонормирование объясняется тем, что для рассматриваемых задач выстраивается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с ленточной матрицей коэффициентов, которая решается методом Гаусса с выделением главного элемента. В этом случае можно говорить даже о том, что для рассматриваемых задач построен вариант метода конечных элементов (МКЭ) со свойственным МКЭ способом преодоления неустойчивости расчетов – построен вариант МКЭ, который для жестких краевых задач выстраивает ленточную матрицу коэффициентов СЛАУ, но не вносит погрешностей при построении ленточной матрицы СЛАУ. Новизна метода состоит в том, что ленточная матрица СЛАУ строится не при помощи применения конечных элементов и не при помощи применения конечных разностей, а при помощи формул теории матриц, что в других литературных источниках не встречается.

**Ключевые слова: варфарин, фибрилляция предсердий, международное нормализованное отношение (МНО)**

# SIMPLE METHODS FOR SOLVING STIFF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

**Vinogradov J.I., Vinogradov A.J.**

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: avtor@disper.ru*

Offers a simple method for solving stiff boundary value problems. Not required orthonormality procedure, which is achieved due to the separation of the interval of integration on the mating areas. The presentation given by the example of a system of differential equations of the cylindrical shell missiles – a system of ordinary differential equations of order 8 (after the separation of partial Fourier method). No need to use orthonormality due to the fact that for these problems built up a system of linear algebraic equations (SLAE) with a band matrix coefficients, which is solved by the Gauss method with the release of the main element. In this case, you can even talk about the fact that for these problems built version of the finite element method (FEM) with characteristic FEM way to overcome the instability of the settlements – built version of the finite element method, which is hard for boundary value problems builds a banded matrix coefficients of the linear algebraic equation, but does not introduce errors in the construction band matrix Slough. The novelty of the method is that UDUAL banded matrix is constructed not by applying the finite element and by applying the finite difference, and by the formulas matrix theory, that in other literature does not occur.

**Keywords: warfarin, atrial fibrillation, international normalized ratio (INR)**

Изложение даётся на примере системы дифференциальных уравнений цилиндрической оболочки ракеты – системы обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка (после разделения частных производных методом Фурье) [5].

Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{Y}'(x) = A\mathbf{Y}(x) + \mathbf{F}(x),$$

где $\mathbf{Y}(x)$ – искомая вектор-функция задачи размерности 8×1, $\mathbf{Y}'(x)$ – производная искомой вектор-функции размерности 8×1, $A$ – квадратная матрица коэффициентов дифференциального уравнения размерности 8×8, $\mathbf{F}(x)$ – вектор-функция внешнего воздействия на систему размерности 8×1.

Краевые условия имеют вид:

$$U\mathbf{Y}(0) = \mathbf{u}, \quad V\mathbf{Y}(1) = \mathbf{v},$$

где $\mathbf{Y}(0)$ – значение искомой вектор-функции на левом крае $x = 0$ размерности 8×1, $U$ – прямоугольная горизонтальная матрица коэффициентов краевых условий левого края размерности 4×8, $\mathbf{u}$ – вектор внешних воздействий на левый край размерности 4×1, $\mathbf{Y}(1)$ – значение искомой вектор-функции на правом крае $x = 1$ размерности 8×1, $V$ – прямоугольная горизонтальная матрица коэффициентов краевых условий правого края размерности 4×8, $\mathbf{v}$ – вектор внешних воздействий на правый край размерности 4×1.

В случае, когда система дифференциальных уравнений имеет матрицу с постоянными коэффициентами $A = \text{const}$, решение задачи Коши имеет вид [2]

$$\mathbf{Y}(x) = e^{A(x-x0)}\mathbf{Y}(x_0) + e^{Ax}\int_{x0}^{x} e^{-At}\mathbf{F}(t)dt$$

где $e^{A(x-x0)} = E + A(x - x_0) + A^2(x - x_0)^2/2! + A^3(x - x_0)^3/3! + \ldots$, где $E$ – это единичная матрица.

Матричная экспонента ещё может называться матрицей Коши или матрициантом и может обозначаться в виде

$$K(x \leftarrow x_0) = K(x - x_0) = e^{A(x-x0)}.$$

Тогда решение задачи Коши может быть записано в виде

$$\mathbf{Y}(x) = K(x \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_0),$$

где $\mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_0) = e^{Ax}\int_{x0}^{x} e^{-At}\mathbf{F}(t)dt$ – это вектор частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Из теории матриц [1] известно свойство перемножаемости матричных экспонент (матриц Коши)

$$K(x_i \leftarrow x_0) = K(x_i \leftarrow x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1} \leftarrow x_{i-2}) \cdot$$
$$\cdot \ldots \cdot K(x_2 \leftarrow x_1) \cdot K(x_1 \leftarrow x_0).$$

В случае, когда система дифференциальных уравнений имеет матрицу с переменными коэффициентами $A = A(x)$, решение задачи Коши можно (как это известно из теории матриц) искать при помощи свойства перемножаемости матриц Коши. То есть интервал интегрирования разбивается на малые участки, и на малых участках матрицы Коши приближенно вычисляются по формуле для постоянной матрицы в экспоненте. А затем матрицы Коши, вычисленные на малых участках, перемножаются:

$$K(x_i \leftarrow x_0) = K(x_i \leftarrow x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1} \leftarrow x_{i-2}) \cdot$$
$$\cdot \ldots \cdot K(x_2 \leftarrow x_1) \cdot K(x_1 \leftarrow x_0),$$

где матрицы Коши приближенно вычисляются по формуле

$$K(x_{i+1} \leftarrow x_i) = e^{A(xi)\cdot \Delta xi} = \exp(A(x_i) \cdot \Delta x_i),$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Вместо формулы для вычисления вектора частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде [1]

$$\mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_0) = e^{Ax} \int_{x0}^{x} e^{-At} \mathbf{F}(t) dt$$

предлагается использовать следующую формулу для каждого отдельного участка интервала интегрирования:

$$\mathbf{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i) \int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t) \mathbf{F}(t) dt.$$

Правильность приведенной формулы подтверждается следующим:

$$\mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = \exp(A(x_j - x_i)) \int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_i - t)) \mathbf{F}(t) dt,$$

$$\mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = \int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_j - x_i)) \exp(A(x_i - t)) \mathbf{F}(t) dt,$$

$$\mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = \int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_j - x_i + x_i - t)) \mathbf{F}(t) dt, \quad \mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = \int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_j - t)) \mathbf{F}(t) dt,$$

$$\mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = \exp(Ax_j) \int_{x_i}^{x_j} \exp(-At) \mathbf{F}(t) dt, \quad \mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_i) = \exp(Ax) \int_{x_i}^{x} \exp(-At) \mathbf{F}(t) dt,$$

что и требовалось подтвердить.

Вычисление вектора частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений производится при помощи представления матрицы Коши под знаком интеграла в виде ряда и интегрирования этого ряда поэлементно:

$$\mathbf{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i) \int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t) \mathbf{F}(t) dt =$$

$$= K(x_j - x_i) \int_{x_i}^{x_j} (E + A(x_i - t) + A^2 (x_i - t)^2 / 2! + \ldots) \mathbf{F}(t) dt =$$

$$= K(x_j - x_i)(E \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{F}(t) dt + A \int_{x_i}^{x_j} (x_i - t) \mathbf{F}(t) dt + A^2 / 2! \int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)^2 \mathbf{F}(t) dt + \ldots).$$

Эта формула справедлива для случая системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $A = \mathrm{const}$. Вектор $\mathbf{F}(t)$ может рассматриваться на участке $(x_j - x_i)$ приближенно в виде постоянной величины $\mathbf{F}(x_i) = \mathrm{constant}$, что позволяет вынести его из под знака интеграла, что приводит к совсем простому ряду для вычислений на рассматриваемом участке. Для случая дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в приведенной выше формуле для каждого участка может использоваться осредненная матрица $A_i = A(x_i)$ коэффициентов системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим вариант, когда шаги интервала интегрирования выбираются достаточно малыми, что позволяет рассматривать вектор $\mathbf{F}(t)$ на участке $(x_j - x_i)$ приближенно в виде постоянной величины $\mathbf{F}(x_i) = \mathrm{constant}$, что позволяет вынести этот вектор из под знаков интегралов:

$$\mathbf{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = K(x_j - x_i)(E\int_{x_i}^{x_j} dt + A\int_{x_i}^{x_j}(x_i - t)dt + A^2/2!\int_{x_i}^{x_j}(x_i - t)^2 dt + \ldots)\mathbf{F}(t).$$

Известно, что при $T = (at + b)$ имеем $\int T^n dt = \frac{1}{a(n+1)}T^{n+1} + \mathrm{const}$ (при $n \neq -1$).

В нашем случае имеем $\int (b-t)^n dt = \frac{1}{(-1)(n+1)}(b-t)^{n+1} + \mathrm{const}$ (при $\mathrm{n} \neq -1$).

Тогда получаем $\int_{x_i}^{x_j}(x_i - t)^n dt = -\frac{1}{\mathrm{n}+1}(x_i - x_j)^{n+1}$.

Тогда получаем ряд для вычисления вектора частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений на **малом** участке $(x_j - x_i)$

$$\mathbf{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = K(x_j - x_i)\cdot(E + A(x_i - x_j)/2! + A^2(x_i - x_j)^2/3! + \ldots)\cdot(x_j - x_i)\cdot\mathbf{F}(x_i).$$

Если участок $(x_j - x_i)$ **не мал**, то его можно поделить на подучастки и тогда можно предложить следующие рекуррентные (итерационные) формулы для вычисления частного вектора.

Имеем

$$\mathbf{Y}(x) = K(x \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_0).$$

Также имеем формулу для отдельного подучастка

$$\mathbf{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \mathbf{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i)\int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t)\mathbf{F}(t)dt.$$

Можем записать

$$\mathbf{Y}(x_1) = K(x_1 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0),$$

$$\mathbf{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}(x_1) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

Подставим $\boldsymbol{Y}(x_1)$ в $\boldsymbol{Y}(x_2)$ и получим

$$\mathbf{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_1)[K(x_1 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)] + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) =$$

$$= K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

Сравним полученное выражение с формулой

$$\mathbf{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_0)$$

и получим, очевидно, что

$$K(x_2 \leftarrow x_0) = K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0),$$

и для частного вектора получаем формулу

$$\mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_0) = K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

То есть вектора подучастков $\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)$, $\mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)$ не просто складываются друг с другом, а с участием матрицы Коши подучастка. Аналогично запишем $\mathbf{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_2)\mathbf{Y}(x_2) + \mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2)$ и подставим сюда формулу для $\mathbf{Y}(x_2)$ и получим

$$\mathbf{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_2)[K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) +$$

$$+K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)] +$$

$$+\mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) +$$

$$+K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) +$$

$$+K(x_3 \leftarrow x_2)\mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) + \mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2).$$

Сравнив полученное выражение с формулой

$$\mathbf{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_0)\mathbf{Y}(x_0) + \mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0),$$

очевидно, получаем, что

$$K(x_3 \leftarrow x_0) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0),$$

и вместе с этим получаем формулу для частного вектора

$$\mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) +$$

$$+K(x_3 \leftarrow x_2)\mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) + \mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2).$$

То есть именно так и вычисляется частный вектор – вектор частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений, то есть так вычисляется, например, частный вектор $\mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0)$ на рассматриваемом участке $(x_3 \leftarrow x_0)$ через вычисленные частные вектора $\mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)$, $\mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)$, $\mathbf{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2)$ соответствующих подучастков $(x_1 \leftarrow x_0)$, $(x_2 \leftarrow x_1)$, $(x_3 \leftarrow x_2)$.

**Контроль точности вычислений.** В случае использования описанной кусочно-константной аппроксимации матрицы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами, когда на всем интервале интегрирования системы ОДУ используются матричные экспоненты от осредненных постоянных аргументов, оценка точности теоретически не дается и предлагаемый метод в этом частном случае можно считать «инженерным», который дает достаточно точные решения для уже опробованных инженерных задач. В тоже время можно производить вычисления и иначе – с заранее известной точностью. В таком варианте предлагаемого метода – в случае применения методов типа Рунге-Кутты для вычисления матриц Коши – хорошо известны оценки точности приближенных вычислений, что означает, что вычисления можно производить с заранее известной погрешностью, так как оценки погрешностей методов Рунге-Кутты известны.

**Простейший метод решения жестких краевых задач.** Идея преодоления трудностей решения жёстких краевых задач путём разделения интервала интегрирования на сопрягаемые участки принадлежит д.ф.-м.н. Ю.И. Виноградову, а выражение этого сопряжения через формулы теории матриц принадлежит к.ф.-м.н. А.Ю. Виноградову. Разделим интервал интегрирования краевой задачи, например, на 3 участка. Будем иметь точки (узлы), включая края:

$$x_0, x_1, x_2, x_3 .$$

Имеем краевые условия в виде

$$U\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{u} ,$$

$$V\mathbf{Y}(x_3) = \mathbf{v} .$$

Можем записать матричные уравнения сопряжения участков:

$$\mathbf{Y}(x_0) = K(x_0 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}(x_1) + \mathbf{Y}^*(x_0 \leftarrow x_1) ,$$

$$\mathbf{Y}(x_1) = K(x_1 \leftarrow x_2)\mathbf{Y}(x_2) + \mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2) ,$$

$$\mathbf{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_3)\mathbf{Y}(x_3) + \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_3) .$$

Это мы можем переписать в виде, более удобном для нас далее:

$$E\mathbf{Y}(x_0) - K(x_0 \leftarrow x_1)\mathbf{Y}(x_1) = \mathbf{Y}^*(x_0 \leftarrow x_1) ,$$

$$E\mathbf{Y}(x_1) - K(x_1 \leftarrow x_2)\mathbf{Y}(x_2) = \mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2) ,$$

$$E\mathbf{Y}(x_2) - K(x_2 \leftarrow x_3)\mathbf{Y}(x_3) = \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_3) .$$

где $E$ – единичная матрица.

Тогда в объединенном матричном виде получаем систему линейных алгебраических уравнений в следующей форме:

решения задач Коши с начальными условиями в $i$-ом узле

$$\mathbf{Y}(x) = K(x \leftarrow x_i)\mathbf{Y}(x_i) + \mathbf{Y}^*(x \leftarrow x_i) .$$

Применять ортонормирование для краевых задач для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках предложенного метода, оказывается, не надо.

И так как предлагаемый метод на каждом отдельном участке интервала интегрирования реализуется от единичной (ортонормированной) матрицы, то нет необходимости в программировании процедур ортонормирования, в отличие от метода С.К. Годунова, что делает программирование предлагаемого метода гораздо более простым по сравнению с методом С.К. Годунова [4].

**Вычислительные эксперименты.** Вычислительные эксперименты проводились в сравнении с методом Виноградовых [1] переноса краевых условий. В этом методе используется построчное ортонормирование. Новый предлагаемый здесь метод позволяет решать все вышеуказанные тестовые задачи вовсе без применения операций ортонормирования, что значительно упрощает его программирование [3]. Для тестовых расчетов задач с вышеуказанными параметрами новым предлагаемым методом интервал интегрирования разделялся на 10 участков, а между узлами, как и сказано выше, решение находилось как решение задачи Коши. Для решения задач удерживалось 50 гармоник рядов Фурье, так как результат при 50 гармониках уже не отличался от случая удержания 100 гармоник. Скорость же расчета тестовых задач новым предлагаемым методом не меньше, чем методом переноса краевых условий, так как оба метода в тестовых задачах при удержании 50 гармоник рядов Фурье выдавали готовое решение мгновенно после запуска

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c} U & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline E & -K(x_0 \leftarrow x_1) & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & E & -K(x_1 \leftarrow x_2) & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & E & -K(x_2 \leftarrow x_3) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & V \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} \mathbf{Y}(x_0) \\ \hdashline \mathbf{Y}(x_1) \\ \hdashline \mathbf{Y}(x_2) \\ \hdashline \mathbf{Y}(x_3) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \hdashline \mathbf{Y}^*(x_0 \leftarrow x_1) \\ \hdashline \mathbf{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2) \\ \hdashline \mathbf{Y}^*(x_2 \leftarrow x_3) \\ \hdashline \mathbf{v} \end{array} \right\| .$$

Эта система решается методом Гаусса с выделением главного элемента. В точках, расположенных между узлами, решение находиться при помощи

программы на выполнение (на ноутбуке ASUS M51V CPU Duo T5800). В то же время программирование нового предложенного здесь метода существенно проще, так как нет необходимости программировать процедуры ортонормирования.

### Список литературы

1. Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Метод переноса краевых условий функциями Коши-Крылова для жёстких линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН. – М.: 2000. – Т. 373, № 4. – С. 474–476.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

3. Маркин А.А., Астапов Ю.В. Построение матрицы граничной жесткости для плоской задачи теории упругости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – № 1–1. – С. 190–195.

4. Шевчук Т.Д. Теория матриц. – М.: Либр, 2012. – 684 с.

5. Kirdina S.G. Institutional matrices theory, or x&y theory: the main provisions and applications // Journal of Institutional Studies. – 2014. – Т. 6. – № 3. – P. 13–33.

### References

1. Vinogradov A.Ju., Vinogradov Ju.I. Metod perenosa kraevyh uslovij funkcijami Koshi-Krylova dlja zhjostkih linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. // DAN. M., 2000, T. 373, no. 4, pp. 474–476.

2. Gantmaher F.R. Teorija matric. M.: Nauka, 1988. 548 p.

3. Markin A.A., Astapov Ju.V. Postroenie matricy granichnoj zhestkosti dlja ploskoj zadachi teorii uprugosti // Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki. 2014. no. 1–1. pp. 190–195.

4. Shevchuk T.D. Teorija matric. M.: Libr, 2012. 684 p.

5. Kirdina S.G. Institutional matrices theory, or x&y theory: the main provisions and applications // Journal of Institutional Studies. 2014. T. 6. no. 3. pp. 13–33.

**Рецензенты:**

Гейнович И.Ю., д.ф.-м.н., профессор, НП «Южный инновационно-технологический университет», г. Ростов-на-Дону;

Предеина Л.М., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУ «Гидрохимический институт» Росгидромета, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 31.12.2014.