

УДК 517.977.56

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРАНИЦЕЙ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

<sup>1</sup>Гукасов А.К., <sup>2</sup>Гукасова Е.В.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», Киров;

<sup>2</sup>ФГБОУ ВПО «Вятская государственная сельскохозяйственная академия»,

Киров, e-mail: artguk@yandex.ru

В данной работе рассматривается решение задачи оптимального управления границей фазового перехода процессом, описываемым квазистационарной задачей Стефана. Квазистационарная задача Стефана – это задача о стационарных процессах в цилиндрических телах в случае, когда граница фазового перехода движется вдоль образующей, не меняясь, с постоянной скоростью. Задача формулируется следующим образом: управляя тепловым потоком  $g(x)$ , добиться минимального отклонения границы фазового перехода от заданной границы  $S$ . Задача сводится к минимизации функционала  $J(g) = \|u\|_S - \theta\|_H$ . Вводится в рассмотрение оператор  $A$ , и доказывается его непрерывность. Приводится формула, определяющая сопряженный оператор. Приводится критерий оптимальности. Для решения аппроксимирующих задач применяется двойственный регуляризованный метод. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Метод Галеркина применяется для решения сопряженной задачи.

**Ключевые слова:** квазистационарная задача Стефана, оптимальное управление

## NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF BORDER OF PHASE TRANSITION

<sup>1</sup>Gukasov A.K., <sup>2</sup>Gukasova E.V.

<sup>1</sup>FGEI HPE «Vyatka State University», Kirov;

<sup>2</sup>FGEI HPE «Vyatka state agricultural academy», Kirov, e-mail: artguk@yandex.ru

The solution of a problem of optimal control by border of phase transition by the process described by a quasistationary problem of Stefan is considered in this paper. Quasistationary problem of Stefan is problem of stationary processes in the cylindrical bodies in the case when the boundary of the phase transition is moving along a generator, without changing a constant speed. The problem is formulated as follows: controlling the heat flow  $g(x)$  to achieve a minimum deviation of the phase transition from the fixed boundary  $S$ . The problem reduces to minimizing the functional  $J(g) = \|u\|_S - \theta\|_H$ . The operator  $A$  is entered into consideration and his continuity is proved. The formula defining the adjoint operator is given. Optimality criterion is given. Dual regularization method is applied for solutions of approximating problems. Results of computing experiments are given. Galerkin method is applied to solve adjoint problem.

**Keywords:** quasistationary Stefan problem, optimal control

Задача о стационарных процессах в цилиндрических телах в случае, когда граница фазового перехода движется вдоль образующей, не меняясь, с постоянной скоростью, называется квазистационарной задачей Стефана. Такие задачи имеют большое прикладное значение, например, в металлургии, сварке и кристаллизации.

### Математическая модель

Пусть пластина, имеющая ширину  $h$  и бесконечную длину, движется вдоль неподвижного теплового источника, задаваемого функцией  $g(x)$ , отличной от нуля на отрезке  $[-\alpha, \alpha]$ . Направление движения совпадает с осью  $x$ . На достаточно большом расстоянии от теплового источника температура принимается равной нулю. Процесс будет описываться следующей квазистационарной задачей Стефана (рис. 1).

$$b \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

$$a = \begin{cases} a_1, & (x, y) \in G_1 \\ a_2, & (x, y) \in G_2 \end{cases}; \quad b = \begin{cases} b_1, & (x, y) \in G_1 \\ b_2, & (x, y) \in G_2 \end{cases};$$

$$\left( a \frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 - \left( a \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 = \lambda(n, V),$$

где  $n$  – нормаль к  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $V$  – вектор скорости;

$$(u)_2 - (u)_1 = 0;$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-R, -\alpha] \cup [\alpha, R] \end{cases}$$

$$-a \frac{\partial u}{\partial y} = g(x) \quad \text{на} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-\alpha, \alpha] \end{cases};$$

$$u(-R, y) = u(R, y) = 0;$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad \begin{cases} y = h \\ x \in [-R, R] \end{cases}.$$

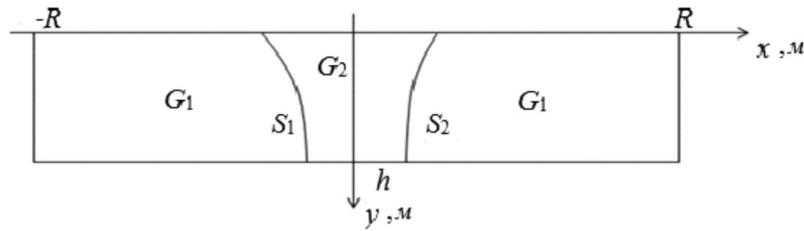


Рис. 1.  $G_1$  – твердая фаза,  $G_2$  – жидкая фаза

Рассмотрим следующую задачу: управляя тепловым потоком  $g(x)$ , добиться минимального отклонения границы фазового перехода от заданной границы  $S$ .

Учитывая, что на границе фазового перехода  $S$  значение  $u$  равно температуре плавления  $\theta$ , зафиксируем желаемую границу  $S$  и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(g) = \|u|_S - \theta\|_H^2 \rightarrow \min, \quad \|g\|_{L^2(-\alpha, \alpha)} \leq \tilde{R}, \quad (1)$$

где  $H = L^2(S_1) \times L^2(S_2)$ .

Представим функцию  $u(x, y)$  в виде суммы

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

где  $v(x, y)$  – решение задачи

$$b \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\left( a \frac{\partial v}{\partial n} \right)_2 - \left( a \frac{\partial v}{\partial n} \right)_1 = 0;$$

$$(v)_2 - (v)_1 = 0;$$

$$a \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ на } \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-R, -\alpha] \cup [\alpha, R] \end{cases}; \quad (2)$$

$$-a \frac{\partial v}{\partial y} = g(x) \text{ на } \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-\alpha, \alpha] \end{cases};$$

$$v(-R, y) = v(R, y) = 0$$

$$a \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ на } \begin{cases} y = h \\ x \in [-R, R] \end{cases}.$$

Если задача (2) при  $g(x) = 0$  имеет только нулевое решение, то она однозначно разрешима в пространстве  $W_{2,0}^1$  [5] для любой функции  $g(x) \in L^2(-\alpha, \alpha)$  и будет выполняться неравенство [5]

$$\|u\|_{W_{2,0}^1} \leq C \|g\|_{L^2(-\alpha, \alpha)}. \quad (3)$$

Рассмотрим оператор  $A: L^2(-\alpha, \alpha) \rightarrow H$ , сопоставляющий функции  $g$  след решения  $v$  задачи (2) на  $S$ .

**Теорема.** Оператор  $A$  является непрерывным. Сопряженный оператор  $A^*$  определяется равенством

$$A^* z = \psi|_{x \in [-\alpha, \alpha], y=0},$$

где  $\psi$  – решение следующей сопряженной задачи:

$$b \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\left( a \frac{\partial \psi}{\partial n} + b \psi \cos(n, x) \right)_2 -$$

$$-\left( a \frac{\partial \psi}{\partial n} + b \psi \cos(n, x) \right)_1 = z,$$

$$(\psi)_2 - (\psi)_1 = 0,$$

$$a \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ на } \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-R, R] \end{cases},$$

$$\psi(-R, y) = \psi(R, y) = 0,$$

$$\psi(-R, y) = \psi(R, y) = 0 \text{ на } \begin{cases} y = h \\ x \in [-R, R] \end{cases}.$$

**Доказательство.** Непрерывность оператора  $A$  вытекает из неравенства (3) и теорем вложения. Формула для сопряженного оператора получается примене-

нием метода интегрирования по частям к равенству

$$\iint_{0^{-R}}^{hR} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \psi(x, y) dx dy = 0.$$

Теорема доказана.

Положим  $z = \theta - w|_S$ . Тогда задачу (1) можно переписать в виде

$$J(g) = \|v|_S - z\|_H^2 = \|Ag - z\|^2 \rightarrow \min, \\ \|g\|_{L^2(-\alpha, \alpha)} \leq \tilde{R}.$$

Пусть  $\{e_k\}$  – базис в  $H$ ,  $h_i = A^*e_i$ . Критерий оптимальности будет иметь следующий вид [2]:

$$\langle \Psi, Ah_k \rangle_H + \gamma \langle g, h_k \rangle_{L^2(-\alpha, \alpha)} = 0 \\ \langle \Psi, e_k \rangle_H - \langle g, A^*e_k \rangle_{L^2(-\alpha, \alpha)} = -\langle z, e_k \rangle_H \\ \gamma(\|g\| - \tilde{R}) = 0, \|g\| \leq \tilde{R}, \gamma \geq 0,$$

где  $\psi = Ag - z$

Пусть  $z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i$ ,  $z_N = \sum_{i=1}^N z_i e_i$ .

Рассмотрим аппроксимирующие задачи:

$$U_N = \{g \in \langle h_1, \dots, h_N \rangle : \|g\| \leq \tilde{R} + \beta_N\}$$

$$\beta_N \rightarrow 0$$

$$J_N(g) = \|Ag - z_N\|^2 = \\ = \left\| \sum_{i=1}^N (g_i Ah_i - z_i e_i) \right\|^2 \rightarrow \min,$$

$$g = \sum_{i=1}^N g_i h_i \in U_N.$$

Для решения этих задач можно воспользоваться двойственным регуляризованным методом [4].

Для этого введем регуляризованные задачи

$$T_N(g_N) = J_N(g_N) + \alpha_N (\|g_N\|^2 - \tilde{R}^2) \rightarrow \inf,$$

$$g_N \in U_N, \alpha_N \rightarrow 0.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L_N(g_N, \lambda) = J_N(g_N) + (\alpha_N + \lambda)(\|g_N\|^2 - \tilde{R}^2),$$

$$\lambda \geq 0.$$

Решая двойственную задачу

$$\inf L_N(g_N, \lambda) \rightarrow \sup_{g \in L^2(-\alpha, \alpha)},$$

$$\lambda \geq 0,$$

найдем последовательность  $\{g_N\}$  приближений оптимального управления  $g$ , которая будет в общем случае слабо сходиться к множеству оптимальных решений.

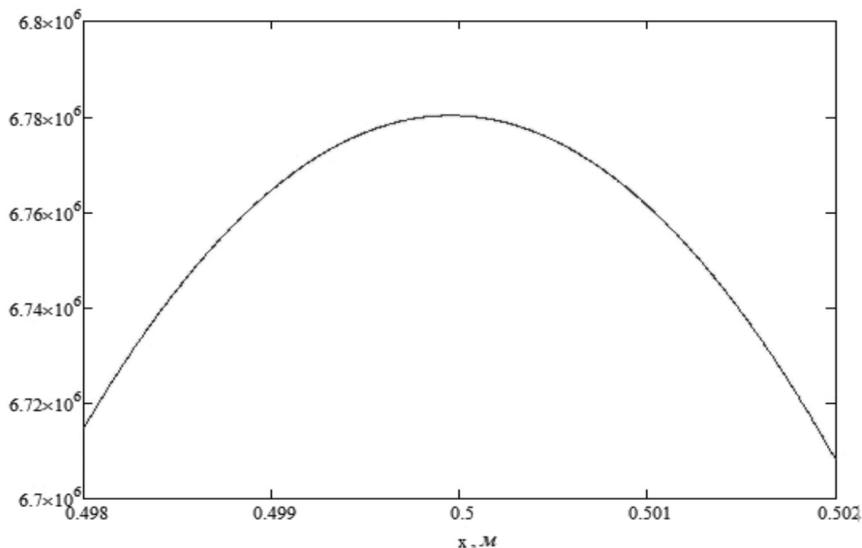


Рис. 2. График полученного источника  $g_N$

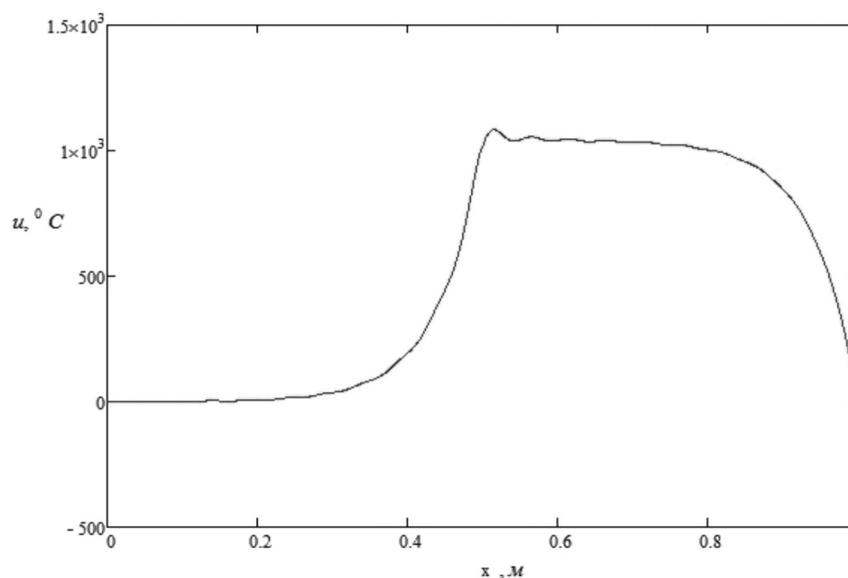


Рис. 3. График полученной температуры  $u(x, 0)$  на границе  $y = 0$

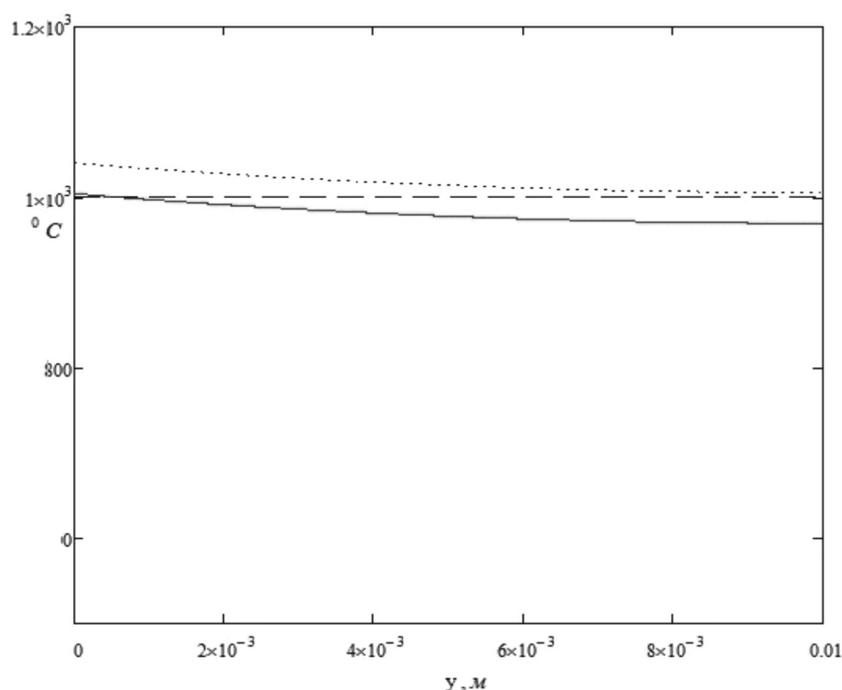


Рис. 4. Температура на  $S_1$  и  $S_2$ : сплошной линией указана температура на  $S_1$ , точечной линией указана температура на  $S_2$ , пунктиром – заданная температура  $\theta$

#### Результаты вычислительных экспериментов

При решении задачи использовались следующие данные:  $S_1$  – отрезок  $x = -r$ ,  $y \in [0, h]$ ,  $S_2$  – отрезок  $x = r$ ,  $y \in [0, h]$ ,  $\alpha = r = 0,002$  м,  $R = 0,5$  м,  $a_1 = 155,7$  Вт/(м×К) и  $a_2 = 100$  Вт/(м×К) – теплопроводность в твердой и жидкой фазе

соответственно,  $h = 0,01$  м – толщина,  $\theta = 1000$  °С – температура,  $b_1 = c_1 \rho_1 V$ ,  $b_2 = c_2 \rho_2 V$ , где  $c_1 = 1000$  Дж/(кг×К) и  $c_2 = 1000$  Дж/(кг×К) – удельная теплоемкость в твердой и жидкой фазе соответственно,  $\rho_1 = 2600$  кг/(м<sup>3</sup>) и  $\rho_2 = 2300$  кг/(м<sup>3</sup>) – плотность в твердой и жидкой фазе соответственно,  $V = 0,001$  м/с – скорость,  $\lambda = \rho_1 k$ ,

где  $k = 315000$  Дж/кг – теплота плавления,  $N = 40$ .

В качестве базиса в пространстве  $H$  использовалась следующая система векторов:

$$e_{2k} = \left( 0, \cos \frac{\pi k y}{h} \right), e_{2k+1} = \left( \cos \frac{\pi k y}{h}, 0 \right).$$

Решение сопряженной задачи находилось методом Галеркина как решение, удовлетворяющее соответствующему интегральному тождеству.

#### Список литературы

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Наука, 2002. – 823 с.
2. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 142 с.
3. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи матем. Наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 5 (245). – С. 133–185.
4. Ишмухаметов А.З. Двойственный регуляризованный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 7. – С. 1045–1060.

5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М., 1973. – 408 с.

#### References

1. Vasilyev F.P. Optimization methods. Moscow: Science. 2002. 823 p.
2. Vasilyev F.P., Ishmukhametov A.Z., Potapov M.M. The generalized moment method in problems of optimum control. Publishing House of Moscow University. 1989. 142 p.
3. Danilyuk I.I. On the Stefan problem. // Russian Mathematical Surveys. 1985. V. 40. no. 5 (245). pp. 133–185.
4. Ishmukhametov A.Z. A dual regularized method of the solution of one class of convex problems of minimization. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. V. 40. no. 7. pp. 1045–1060.
5. Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow. 1973. 408 p.

#### Рецензенты:

Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры фундаментальной и компьютерной математики, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров;

Шатров А.В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования в экономике, ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров.

Работа поступила в редакцию 30.12.2014.