

УДК 517.925

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А.

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
Актобе, e-mail: amina-15@mail.ru

Объектом исследования настоящей работы являются квазилинейные системы уравнений с линейными дифференциальными операторами в частных производных первого порядка и с коэффициентами, зависящими от характеристик. Ставится задача об исследовании существования и единственности многопериодического решения квазилинейной системы. Для решения данной задачи используется метод приведения к каноническому виду матрицы системы на основе линейного преобразования. В работе устанавливаются условия, при которых собственные функции матрицы системы обладают свойствами многопериодичности и гладкости, получены условия приводимости дифференциальной системы к каноническому виду, условия существования и единственности многопериодического решения квазилинейной системы уравнений в частных производных первого порядка, в терминах собственных значений и функции Грина. Доказательство существования многопериодического решения уравнения канонического вида приводится на основе принципа неподвижных точек для оператора, определенного в пространстве непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных по норме. Записано интегральное представление решения.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, собственные значения, матрица преобразования, каноническая форма, периодическое решение

MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF QUASI-LINEAR SYSTEM IN THE FIRST ORDER PARTIAL DERIVATIVES

Mukhambetova A.A., Sartabanov Z.A.

K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, e-mail: amina-15@mail.ru

Object of research of this paper are quasi-linear systems of equations with linear differential operators of the first order partial derivatives with coefficients depending only on the characteristics. The task of research the existence and uniqueness of multiperiodic solutions of quasi-linear system. To solve this problem, we use the method of reduction to canonical form of matrix system by the linear transformation. We establish conditions in which the eigenfunctions of matrix system have properties of multiperiodic and smoothness, obtained the conditions for reducibility of differential system to the canonical form, conditions of the existence and uniqueness of multiperiodic solution of quasi-linear system of equations of the first order partial derivatives in terms of eigenvalues and Green's function. Proof of the existence multiperiodic solution of equation of canonical form is given on the basis of fixed points for the operator defined in the space of continuously differentiable functions, bounded by norm. Integral representation of the solution is presented.

Keywords: quasi-linear equations, eigenvalues, the transformation matrix, the canonical form, the periodic solution

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений вида

$$D_e x = A(\sigma)x + f(\tau, t, \sigma, x) \quad (1)$$

с дифференциальным оператором

$$D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \quad (2)$$

где $A(\sigma)$ – гладкая и периодическая по $\sigma \in R^m$ с вектор-периодом $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ $n \times n$ – матрица

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C^{(1)}(R^m), \quad k \in Z^m, \quad (3)$$

$k = (k_1, \dots, k_m) \in Z \times \dots \times Z = Z^m$, Z – множество целых чисел, $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$,

$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ – символический вектор,

$e = (1, \dots, 1) - m$ – вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения векторов, $\sigma = t - et$ – базовая характеристика оператора D_e .

Предполагается, что вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ обладает свойствами:

$$f(\tau + \theta, t + q\omega, \sigma + q\omega, x) = f(\tau, t, \sigma, x) \in C^{(0,2,2,2)}_{\tau,t,\sigma,x}(R \times R^m \times R^m \times R^n) \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, t, \sigma, x) \right| \leq L = \text{const} > 0 \quad (5)$$

При условиях (3)–(5) начальная задача Коши имеет единственное решение с глобальной продолжительностью.

Ставится задача об исследовании существования и единственности (Θ, ω, ω) – периодических решений $x = x(\tau, t, \sigma)$

квазилинейной системы (1) в терминах собственных значений матрицы $A(\sigma)$ путем приведения к каноническому виду.

Линейной неособенной заменой:

$$x = B(\sigma)y \quad (6)$$

с $(n \times n)$ -матрицей $B(\sigma)$ из такого же класса что и $A(\sigma)$ систему (1) приводим к системе:

$$D_\epsilon y = B^{-1}(\sigma)A(\sigma)B(\sigma)y + g(\tau, t, \sigma, y), \quad (7)$$

где $g(\tau, t, \sigma, y) = B^{-1}(\sigma)f(\tau, t, \sigma, B(\sigma)y)$.

Очевидно, что если возможно выбрать матрицу $B(\sigma)$ так, чтобы матрица подобия

$$I(\sigma) = B^{-1}(\sigma)A(\sigma)B(\sigma) \quad (8)$$

имела жорданову каноническую форму, то поставленная задача для системы (1) решалась бы довольно просто. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения вопроса о приведении гладкой многопериодической матрицы (3) к жордановой канонической форме $I(\sigma)$ преобразованием подобия (8).

Задача такого характера рассматривалась в связи с различными проблемами теории дифференциальных уравнений в работах [1]–[9].

В дальнейшем точки $t \in \mathbb{R}^m$ и $t + k\omega$, $k \in \mathbb{Z}^m$ рассматриваются как идентичные. Совокупность таких точек T^m называется m -мерным тором. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Если уравнение $\det[\lambda E - A(t)] = 0$ при условии (3) имеет l различных собственных значений $\lambda_\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, l}$ с независимыми от $t \in \mathbb{R}^m$ кратностями n_α , то собственные функции $\lambda_\alpha(t)$ обладают свойствами многопериодичности и гладкости.

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1 и ранг r_α матрицы $\lambda_\alpha(t)E - A(t)$ не зависит от $t \in T^m$ при каждом $\alpha = \overline{1, l}$, то матрица $A(t)$ подобна матрице

$$B(t) = P(t)A(t)P^{-1}(t) = \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_1(t) & 0 \\ \hline b(t) & B_0(t) \end{array} \right\| \quad (9)$$

с некоторой неособенной матрицей преобразования $P(t) \in C^{(1)}(T^m)$, где $\lambda_1(t)$ – собственная функция матрицы $A(t)$, 0 – нулевая строка, $b(t)$ – вектор-функция, $B_0(t)$ – квадратная матрица порядка $(n-1)$, причем $b(t) \in C^{(1)}(T^m)$ и $B_0(t) \in C^{(1)}(T^m)$.

Далее, предположим, что матрица $B_0(t)$ из (8) приводится к ω -периодической гладкой жордановой канонической форме $J(t) \in C^{(1)}(T^m)$ периодическим гладким преобразованием подобия:

$$P_0(t)B_0(t)P_0^{-1}(t) = J(t), \quad (10)$$

где $P_0(t) \in C^{(1)}(T^m)$, $\det P_0(t) \neq 0$, $t \in T^m$, $J(t) = \text{diag}[J_2(\lambda_2(t)), \dots, J_l(\lambda_l(t))]$ – жорданова форма с n_α – клетками вида

$$J_\alpha(\lambda_\alpha(t)) = H_\alpha + \lambda_\alpha(t)E_\alpha, \quad \alpha = \overline{2, l},$$

H_α – матрица, у которой поддиагональные элементы – единицы, а остальные – нули, E_α – единичная матрица.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и условие (9), тогда матрица $A(t)$ ω -периодическим гладким преобразованием подобия приводится к виду

$$Q(t)A(t)Q^{-1}(t) = \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_1(t) & 0 \\ \hline a(t) & J(t) \end{array} \right\|, \quad (11)$$

где

$$a(t) = P_0(t)b(t) \in C^{(1)}(T^m).$$

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda(t) = \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_1(t) & 0 \\ \hline a(t) & J_2(\lambda_2(t)) \end{array} \right\|, \quad (12)$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ – скалярные функции, $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ – столбцовая вектор-функция, $J_2(\lambda_2(t))$ – жорданова $n \times n$ – клетка, соответствующая $\lambda_2(t)$, $t \in T^m$.

Лемма 3. Если $\lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$, $a(t) \in C^{(1)}(T^m)$, то матрица (11) ω -периодической гладкой матрицей $Q(t)$ приводится к жордановой канонической форме:

$$Q^{-1}(t)\Lambda(t)Q(t) = J(t), \quad (13)$$

где $J(t) = \text{diag}[\lambda_1(t), J_2(t), \lambda_2(t)]$ и $Q(t)$ – матрица преобразования вида:

$$Q(t) = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q(t) & E \end{array} \right\| \in C^{(1)}(T^m) \quad (14)$$

с единичной n – матрицей E и неизвестной столбец-функцией $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

Далее, для обобщения леммы 3 рассмотрим матрицу

$$\Lambda(t) = \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_1(t) & 0 \\ \hline a(t) & J(t) \end{array} \right\|, \quad (15)$$

где $\lambda_1(t)$ – скалярная функция, $J(t) = \text{diag}[J_2(\lambda_2(t)), \dots, J_s(\lambda_s(t))]$ – $J(\lambda_\alpha(t)) - n_\alpha \times n_\alpha$ – клетки Жордана, $a(t) = (a_2(t), \dots, a_s(t))$ – заданные вектор-функции, $n_2 + \dots + n_s = n$.

Лемма 4. Если $\lambda_1(t) \neq \lambda_\alpha(t)$, $a_\alpha(t) \in C^{(1)}(T^m)$, $\alpha = \overline{2, s}$, то матрица (16) подобна матрице:

$$\text{diag}[\lambda_1(t), J(t)] = P(t) \Lambda(t) P^{-1}(t) \quad (15)$$

с некоторой неособенной матрицей

$$P(t) = \left\| \frac{1}{p(t)} \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ p(t) & & E \end{vmatrix} \right\| \in C^{(1)}(T^m), \quad (17)$$

где $p(t) = (p_2(t), \dots, p_s(t))$, $p_\alpha(t) = p_{\alpha 1}(t), \dots, p_{\alpha n_\alpha}(t)$ – вектор – функции, $\alpha = 2, s$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2 и матрица $A(t)$ имеет различные собственные значения, тогда существует неособенная матрица преобразования $P(t) \in C^{(1)}(T^m)$ такая, что

$$P^{-1}(t) A(t) P(t) = J(t), \quad (18)$$

где $J(t)$ – жорданова каноническая матрица.

Для доказательства теоремы используем метод математической индукции.

Таким образом, на основе лемм 1–4 и теорем 1, 2 система (1) приводится к каноническому виду

$$D_\epsilon y = J(\sigma) y + g(\tau, t, \sigma, y), \quad (19)$$

Матрица $J(\sigma)$ имеет диагональный вид

$$J(\sigma) = \text{diag}[\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_n(\sigma)],$$

причем предположим, что все собственные значения $\lambda_\alpha(\sigma), \alpha = \overline{1, n}$ действительно значимые различные и спектр не содержит нуля:

$$|\lambda_\alpha(\sigma)| \geq \delta = \text{const} > 0, \sigma \in R^m, \alpha = \overline{1, n} \quad (20)$$

При условии (20) система (19) дихотомична и задача о ее многопериодическом решении имеет функцию Грина $G(\tau - s, \sigma)$, которая обладает свойствами:

$$1^0. D_\epsilon G(\tau - s, \sigma) = J(\sigma) G(\tau - s, \sigma), \tau \neq s,$$

$$2^0. G(0+, \sigma) - G(0-, \sigma) = E,$$

$$3^0. G(\tau - s, \sigma + q\omega) = G(\tau - s, \sigma), \tau - s \in R, \sigma \in R^m, q \in Z^m,$$

$$4^0. |G(\tau - s, \sigma)| \leq \Gamma e^{-\gamma|\tau - s|},$$

где E – единичная матрица, $\Gamma \geq 1, \gamma > 0$ – некоторые постоянные.

Тогда задача о многопериодическом решении системы (19) имеет единственное решение $y(\tau, t, \sigma)$. Это решение определяется из интегрального уравнения:

$$y(\tau, t, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s, \sigma) g(\sigma, t - \epsilon\tau + \epsilon s, \sigma, x(s, t - \epsilon\tau + \epsilon s, \sigma)) ds. \quad (21)$$

Тогда в силу замены (5) система (1) имеет единственное (θ, ω) решение.

Таким образом, имеем основную теорему.

Теорема 3. Пусть наряду с условиями теоремы 2 выполнены условия (4), (5) и (20). Тогда система (1) при достаточно малом $L > 0$ имеет единственное (τ, ω, ω) – периодическое решение

$$x(\tau, t, \sigma) = B(\sigma) y(\tau, t, \sigma),$$

где $y(\tau, t, \sigma)$ есть решение системы (19), определяемое интегральным уравнением (21).

Заметим, что доказательство существования решения уравнения (21) приводится на основе принципа неподвижных точек для оператора

$$Qy(\tau, t, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s, \sigma) g(\sigma, t - \epsilon\tau + \epsilon s, \sigma, x(s, t - \epsilon\tau + \epsilon s, \sigma)) ds,$$

определенного в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $y(\tau, t, \sigma)$, ограниченных по норме:

$$\|y\|_1 = \|y\| + \left\| \frac{\partial y}{\partial \tau} \right\| + \sum_{\alpha=1}^m \left\| \frac{\partial y}{\partial t_\alpha} \right\| \text{ положительным}$$

числом Δ , где $\|\cdot\|$ – знак нормы, максимизирующей модуль вектор-функции.

Список литературы

1. Вазов В.А. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Мухамбетова А.А. Устойчивость линейных уравнений в частных производных второго порядка с колебатель-

ными коэффициентами. Международный журнал экспериментального образования. – 2013. – № 4. – С. 120–124.

3. Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Об ограниченности решений линейных D-уравнений второго порядка с многопериодическим потенциалом // Математический журнал. – Алматы, 2003. – Т. 3, № 1 (7). – С. 68–73.

4. Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – Киев: ИМ НАН Украины, 1999. – 220 с.

5. Сартабанов Ж.А. О краевой задаче для D-уравнений второго порядка. Известия АН КазССР, сер. физ.-мат., 1992. – № 3. – С. 59–64.

6. Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. Stability of solutions the system of differential equations with multivariate time. Aktobe: Print A, 2007. – 168 p.

7. Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. Research of multiperiodic solutions of quasi-linear system in the first order

partial derivatives. Bulletin d'Eurotalent-Fidjip, 2014. – № 4. P. 33–37.

8. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable. Math. Ann. 161 (1969), 67–77.

9. Vejvoda O. Partial differential equations: time periodic solutions. The Hague/ Boston/ London, 1982. – 357 p.

References

1. Vazov V.A. *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy* (Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations). M.: World, 1968, 464 p.

2. Mukhambetova A.A. *Ustoychivost lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka s kolebatelnymi koef-ficientami* (Stability of the second order linear partial differential equations with oscillatory coefficients). International Journal of Experimental Education, 2013, no 4, pp. 120–124.

3. Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. *Ob ogran-ichennosti resheniy lineynykh D- uravneniy vtorogo poryadka s mnogoperiodicheskim potencialom* (About boundary solutions of the second order linear D- equations with multiperiodic potential). Mathematical Journal, Almaty, 2003. Vol. 3 no 1 (7). pp. 68–73.

4. Samoylenko A.M., Laptinskiy V.N., Kenzhebaev K.K. *Konstruktivnye metody issledovaniya periodicheskikh I mnogo-tochechnykh kraevykh zadach* (Constructive methods of research of periodic and multipoint boundary value problems). Kiev: IM NAS, 1999. 220 p.

5. Sartabanov Zh.A. *O kraevoy zadache dlya D- uravneniy vtorogo poryadka* (About boundary value problem for the second order D-equation). Proceedings of the AS of the Kazakh SSR, Physics and Mathematics Sec., 1992, no 3, pp. 59–64.

6. Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. Stability of solutions the system of differential equations with multivariate time. Aktobe: Print A, 2007, 168 p.

7. Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. Research of multiperiodic solutions of quasi-linear system in the first order partial derivatives. Bulletin d'Eurotalent-Fidjip, 2014, no 4, pp. 33–37.

8. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable. Math. Ann. 161 (1969), pp. 67–77.

9. Vejvoda O. Partial differential equations: time periodic solutions. The Hague / Boston / London, 1982. 357 p.

Рецензенты:

Бержанов А.Б., д.ф.-м.н., профессор, директор института прикладной математики Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова, г. Актобе;

Тасмамбетов Ж.Н., д.ф.-м.н., профессор, Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе.

Работа поступила в редакцию 05.12.2014.