УДК 624.74.24

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕТИ НА СФЕРЕ

Антошкин В.Д., Никонов В.И.

ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва» Минобрнауки России, Саранск, e-mail: dep-general@adm.mrsu.ru

Рассмотрены вопросы формообразования сферических оболочек на основе геодезической сети. Исследован один из методов образования треугольных сетей на сфере. Поставлена задача оптимизации геометрической сети на сфере. Критерием оптимальности является минимальное число типоразмеров элементов купола, возможность укрупнительной сборки и предварительного напряжения. Оптимизация треугольной геометрической сети на сфере по критерию минимума типоразмеров элементов может быть представлена как постоптимизация и решена размещением в системе неправильных шестиугольников, вписанных в окружности минимальных размеров, максимума правильных шестиугольников. Полученные решения позволят реализовать алгоритмы аппроксимации сферы треугольной геометрической сетью с максимальным числом правильных шестиугольников и подготовить варианты оптимизации разрезок сферы.

Ключевые слова: сборная сферическая оболочка, геометрическая сеть, описанная окружность, оптимизация, правильный шестиугольник, разрезка, купол

OF OPTIMIZATION OF GEOMETRIC NETWORKS ON SPHERE ARECONSIDERED

Antoshkin V.D., Nikonov V.I.

Mordovian State University, Saransk, e-mail: dep-general@adm.mrsu.ru

The problems of constructive and technology forming of spherical shells are based on geodetic network. Several design and technological methods of education triangular area networks are investigated. Determining the position of the basic elements of the network to allow the field to optimize network basic criteria. Investigated a method of formation of triangular networks on the sphere. The guestions of optimization of geometric networks on sphere areconsidered. In each of these optimal criterion there is the minimum number of standard sizes of structural components and the minimal number of components from the dome. The optimization of triangular geometric network on the sphere by the minimum sizes of elements can be represented as postoptimization and solved placement in the system wrong hexagons inscribed minimum size of the maximum regular hexagons. The resulting solutions will realize the scope of approximation algorithms triangular geometric network with the maximum number of regular hexagons and prepare options for optimizing razrezok sphere.

Keywords: team spherical shell, geometric network, panel, optimization, a regular hexagon, cutting, the dome

Задача оптимизации треугольной геометрической сети на сфере по критерию минимума типоразмеров элементов уже ставилась многими авторами различных систем сферической разрезки [1–2]. Во всех случаях решений находилась одна или несколько схем разрезок сферы с использованием в основном осей симметрии в виде главных линий (линий больших окружностей сферы), линий параллельных сечений сферы, а также совместимости частей граней правильных многогранников. Очевидно, что размещение на сфере правильных и неправильных шестиугольников, вписанных в окружности, т.е. фигур плоских или составленных в свою очередь из сферических треугольников (рис. 1 а, б) с минимальными размерами ребер, имеет оптимальное решение в виде сети, образованной на основе окружностей минимальных радиусов, т.е. окружностей на сфере, полученных при касании трех смежных окружностей, центры которых находятся на наименьшем расстоянии друг от друга [2–5]. Данное направление активно развивается рядом зарубежных ученых, а в России новосибирской школой [1].

Сферический шестиугольник можно представить как два четырехугольника с заданными сторонами, и он имеет максимальную площадь тогда, когда вписан в окружность. Шестиугольные панели, вписанные в окружности с минимальными радиусами (т.е. касающиеся), будут иметь минимальные размеры и максимальные площади при заданном числе граней треугольной сети сферы. Т.е. элементы сети в виде радиусов будут иметь минимальную длину, так как представляют собой кратчайшие расстояния между центрами окружностей, а контуры, вписанные в окружности, также будут иметь минимальные размеры. Образование правильных шестиугольников в этой сети возможно как частный случай. Таким образом, для каждого варианта разрезки оптимальное решение по минимуму материала (длины элементов) – это размещение шестиугольников, вписанных в окружности, причем в первом оптимальном варианте смежные три окружности касаются друг друга. Каждое оптимизационное решение по другим критериям будет следующим за оптимальным – «постоптимальным».

Оптимизация треугольной геометрической сети на сфере по критерию минимума типоразмеров элементов может быть представлена, таким образом, как постоптимизация и решена размещением в системе неправильных шестиугольников, вписанных в окружности минимальных размеров, максимума правильных шестиугольников, например, в совместимых сферических треугольниках (сегментах) икосаэдра со схемой разрезки, показанной на рис. 1 и 2. Кроме вариантов применения свойств симметрии главных и параллельных линий окружностей сферы, в подобных разрезках должны быть реализованы возможности центральной симметрии окружностей [3, 4]. На схемах рис. 1 и 2 приведено размещение описанных окружностями шестиугольников в сферическом треугольнике (совместимом сегменте сферического икосаэдра) с внутренними углами 36, 90 и 60°. При оптимизации треугольной сети с помощью симметрии окружностей и главных линий сферы можно выделить как одну из промежуточных задач – определение положения центров окружностей шестиугольников (рис. 1: центры первых рядов шестиугольников O_1, O_2). Переход от неправильных к правильным шестиугольникам, вписанным в окружности, проведем на примере разрезки в виде 1280-гранника (рис. 2).

Итак, на первом этапе определяем положение центров O_1, O_2 шестиугольников равных радиусов в сферическом треугольнике (совместимом сегменте сферы с разрезкой 1280-гранника (рис. 1)) у внутреннего угла 60 градусов. Введя обозначения $r = r_1$, $o = \dfrac{a_1}{2}$, $A = A_1$ и используя теоремы синусов и косинусов для треугольников, получаем систему уравнений (1):

$$\frac{\sin r}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin o}{\sin A},$$

$$\cos A = \sin 60^\circ \cdot \cos o, \qquad (1)$$

$$\sin 2r = \frac{\sin(a - o)}{\sin 2A}.$$

Параметры прямоугольного сферического треугольника (рис. 1) с катетами r_1 и a_1 определяются из системы уравнений (1).

Катеты и гипотенузы рассматриваемых сферических треугольников связаны соотношениями

$$\mathrm{tg} r = \mathrm{tg} r_1 \cdot \cos A,$$

$$\mathrm{tg} o = \mathrm{tg} r_1 \cdot \cos 60^\circ, \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg} r = \mathrm{tg} r \cdot \cos 2A.$$

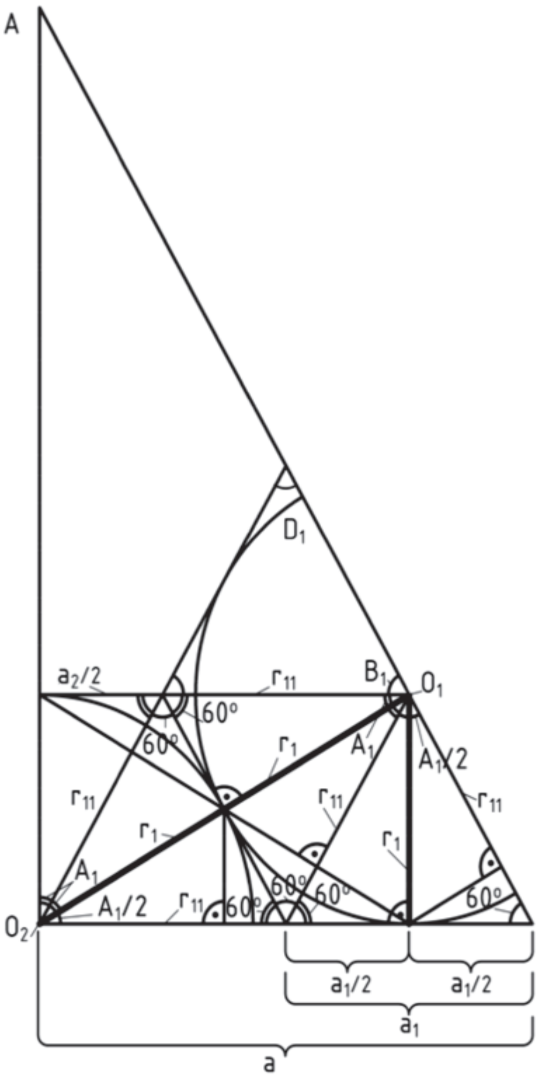

Рис. 1. Определение положения центров O_1 и O_2 шестиугольников (толстые линии) равных радиусов в сферическом треугольнике с внутренними углами 90–60°. Углы даны для схемы-первоосновы расположения центров, показанной тонкими линиями, т.е. для касающихся окружностей, описывающих неправильные шестиугольники равных радиусов

Таким образом, из уравнений (2) можно определить зависимость параметров o и A (рис. 1), позволяющую определить центр окружности O_1.

Проведя некоторые преобразования, имеем

$$\mathrm{tg}^2 r = 1 - \cos 2A,$$

$$\mathrm{tg}\, r = \frac{\mathrm{tg}\, o \cos A}{\cos 60^\circ}.$$

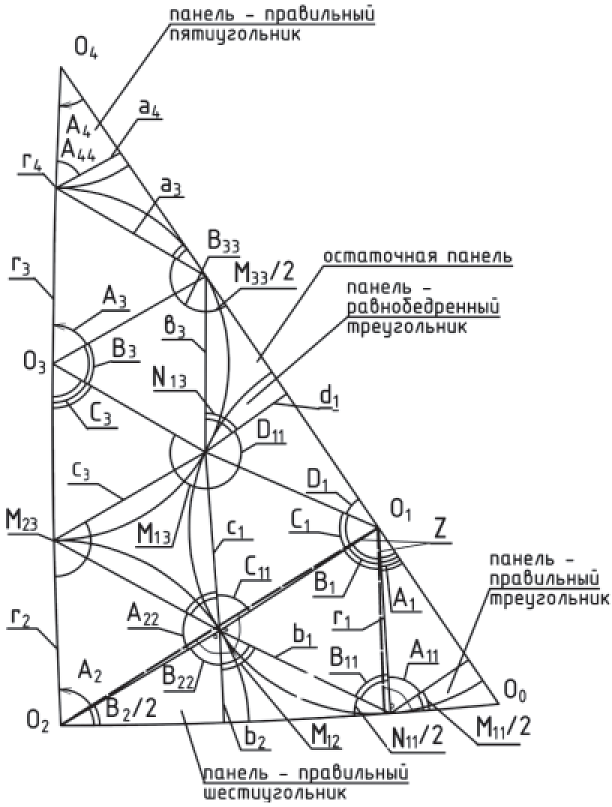

Рис. 2. Совместимый сегмент сборной сферической оболочки в виде 1280-гранника: Оо – центр панели в виде правильного треугольника на сфере; O_1, O_2, O_3 – центры панелей в виде плоских шестиугольников; O_4 – центр панели в виде правильного плоского пятиугольника; A_2 – обозначение внутреннего угла первого по часовой стрелке треугольника в шестиугольнике у центра O_2; b_1 – обозначение полярного угла дуги второго по часовой стрелке треугольника в шестиугольнике против центра O_1; M_{ii}, N_{ii} – внутренние углы между соответствующими i – шестиугольниками

Отсюда приходим к уравнению

$$1-\cos 2A=\frac{\mathrm{tg}^2 o\cos^2 A}{\cos^2 60°},$$

которое приводится к виду

$$3\mathrm{tg}^2 A - 1 = 4\mathrm{tg}^2 o. \qquad (3)$$

Теперь определим зависимость параметров o и a**.** Исходя из уравнений (1), получаем

$$\sin r=\frac{\sin o\ \sin 60°}{\sin A},$$

$$\cos r=\frac{\sin(a-o)}{4\cos A\sin o\sin 60°}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, исключаем параметр r:

$$\frac{3\sin^2 o}{4\sin^2 A}+\frac{\sin^2(a-o)}{12\cos^2 A\sin^2 o}=1.$$

Откуда получаем уравнение

$$\frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 o\left(1+\mathrm{tg}^2 a\right)+\frac{1}{12}\mathrm{tg}^2 A\frac{1+\mathrm{tg}^2 o}{\mathrm{tg}^2 o}\left(\mathrm{tg}\, a-\mathrm{tg}\, o\right)^2=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^2 A}{1+\mathrm{tg}^2 A}\left(1+\mathrm{tg}^2 o\right)\left(1+\mathrm{tg}^2 a\right).$$

Так как из (3)

$$\mathrm{tg}^2 A=\frac{4\ \mathrm{tg}^2 o+1}{3},$$

то искомое соотношение принимает вид

$$\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 o\left(1+\operatorname{tg}^2 a\right)+\frac{1}{12}\frac{4\operatorname{tg}^2 o+1}{3}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2 o}{\operatorname{tg}^2 o}\left(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} o\right)^2 = \\ =\frac{\left(4\operatorname{tg}^2 o+1\right)(1+\operatorname{tg}^2 a)}{4}.$$

Наконец, введя обозначения

$$k_a = \operatorname{tg}a,\ t = \operatorname{tg}o,$$

и проведя некоторые преобразования, приходим к уравнению

$$4t^6-8k_at^5-\left(5k_a^2+4\right)t^4-10k_at^3-\left(4k_a^2+8\right)t^2-2k_at+k_a^2=0,$$

которое приводится к виду

$$\left(t^2+1\right)\left(t+\frac{k_a}{2}\right)\left(4t^3-10k_at^2-8t+2k_a\right)=0. \qquad (4)$$

По условию задачи находятся только положительные корни уравнения (4), а следовательно, искомое решение найдем из уравнения третьей степени

$$2t^3-5k_at^2-4t+k_a=0. \qquad (5)$$

Проводим вычисления для параметра $a = 20,905162886°$, получаем значение параметра $k_a = 0,3819661$. Корни уравнения (5) имеют вид

$$t_1 = 1,9366878;$$

$$t_2 = -1,0736234;$$

$$t_3 = 0,0918509.$$

Искомое решение определяем, исходя из корня t_3:

$$o = 5,2479437°,$$

$$A = 30,413417°.$$

«Постоптимизация» по критерию минимума типоразмеров элементов может быть проведена размещением в системе неправильных шестиугольников, вписанных в окружности минимальных размеров с центрами O_1 и O_2, максимума правильных шестиугольников (рис. 2). Целевая функция будет выглядеть как минимум среднеквадратического отклонения центральных внутренних углов только шестиугольников (без правильного пятиугольника) по отношению к углу 60°.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(A_i-60°\right)^2+\left(B_i-60°\right)^2+\left(C_i-60°\right)^2+\left(D_i-60°\right)^2\rightarrow\min. \qquad (6)$$

Углы A_i, B_i, … связаны соотношениями, подобными (1)–(5), т.е. окружности, в которые вписаны шестиугольники, либо касаются, либо пересекаются.

Здесь A_i, B_i, … – внутренние углы соответствующих i-шестиугольников, размещенных в сегменте (рис. 2). Оптимальное значение отклонений углов для пары шестиугольников, вписанных в окружности с неизменным расположением их центров, показано для схемы разрезки на рис. 2 (первоначальное положение радиусов показано здесь пунктиром) и очевидно равно:

$$A_1-60° = A_2-60° = -0,826834°,$$

$$B_1-60° = -0,826834°,$$

$$B_2-60° = -0,413417°,$$

$$C_2-60° = 0,413417°,$$

$$D_2-60° = 0.$$

Таким образом, сложные задачи со многими центрами можно упростить разбиением шестиугольников на группы и применением метода итераций. Для решения уравнения (5) использовалось свободно распространяющееся программное обеспечение Sclab 5.4.1 – The free platform for Numerical Computation (аналог Matlab) [7].

Выводы

Полученные решения позволят реализовать алгоритмы аппроксимации сферы треугольной геометрической сетью с максимальным числом правильных шестиугольников и подготовить варианты оптимизации разрезок сферы.

Список литературы

1. Бураго Ю.Д., Иванов С.В., Малев С.Г. Замечания о чебышевских координатах. Геометрия и топология. 9, Зап. научн. сем. ПОМИ, 329, ПОМИ. – СПб., 2005. – С. 5–13.

2. Миряев Б.В. Оптимизация геометрической схемы сетчатых куполов, образованных на основе икосаэдра // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – № 3. – С. 122–125.

3. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т. Сборная сферическая оболочка. Патент на полезную модель РФ № 129534 27.06.2013.

4. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т. Сборная сферическая оболочка. Патент на изобретение РФ № 2012116363, 20.02.2014.

5. Bretschneider C.A. Unetersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes // Arch. Math. 1842. – Bd 2. – pp. 225-261.

6. Granino A. Korn Mathematical handbook: For scientists and engineers. – 1968. – 343 p.

7. Software Scilab 5.4.1 – The free platform for Numerical Computation 06.17.2014/ www. softkumir.ru/index.

References

1. Burago Y.D., Ivanov S.V., Malev S.G. Remarks on Chebyshev coordinates. Geometry and topology. 9, Zap. Nauchn. Sem. PDMI, 329, POMI, St. Petersburg., 2005, pp. 5–13.

2. Miryaev B.V. Optimization of the geometry of reticulated domes on the basis of ikosahedron. Regional architecture and engineering. 2012. no. 3, pp. 122–125.

3. Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T. Team spherical shell. A utility model patent RU № 129534 from 06.27.2013.

4. Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T. Team spherical shell. Patent RU № 2012116363 from 20.02.2014.

5. Bretschneider C. A. Unetersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes // Arch. Math. 1842. Bd 2. pp. 225–261.

6. Granino A. Korn Mathematical handbook: For scientists and engineers, 1968.

7. Software Scilab 5.4.1 The free platform for Numerical Computation/ Date Views 06.17.2014/ www. softkumir.ru/index.

Рецензенты:

Колчунов В.И., д.т.н., профессор, академик РААСН, г. Москва;

Кондращенко В.И., д.т.н., профессор кафедры «Строительные материалы и технологии», ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения», г. Москва.

Работа поступила в редакцию 06.11.2014.