

УДК 536.244

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА АККУМУЛЯЦИИ ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ В СТАЦИОНАРНОМ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕМСЯ РЕГЕНЕРАТИВНОМ ТЕПЛОУТИЛИЗАТОРЕ

Монаркин Н.Н., Наймов А.Н., Синицын А.А., Роголина Т.В.

ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный университет»,

Вологда, e-mail: nikolay-monarkin@yandex.ru

Исследуется процесс теплообмена между воздухом и насадкой в стационарном переключающемся регенеративном теплоутилизаторе. Процесс работы теплоутилизатора характеризуется режимами аккумуляции и регенерации тепловой энергии. В статье построена математическая модель процесса аккумуляции тепловой энергии в термодинамической системе «воздух – насадка». Математическая модель представлена в виде смешанной (начально-краевой) задачи для системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Доказана единственность решения смешанной задачи методом энергетических равенств и неравенств и построена формула приближенного решения смешанной задачи методом последовательных приближений. Формула приближенного решения позволяет количественно и качественно исследовать процесс теплообмена между воздухом и насадкой и разработать компьютерную виртуальную модель процесса аккумуляции тепловой энергии. Приведены графики искомых функций.

Ключевые слова: аккумуляция и регенерация тепловой энергии, смешанная задача, единственность решения, приближенное решение

MATHEMATICAL MODEL OF PROCESS OF HEAT ACCUMULATION IN THE STATIONARY SWITCHES REGENERATIVE HEAT EXCHANGER

Monarkin N.N., Naimov A.N., Sinitsyn A.A., Rogulina T.V.

Vologda State University, Vologda, e-mail: nikolay-monarkin@yandex.ru

Is investigated the process of heat exchange between the air and the adapter in the stationary switches regenerative heat exchanger. The process of heat exchanger is characterized by the accumulation and recovering of the heat energy. In this paper a mathematical model of the process of accumulation of heat energy in a thermodynamic system «air-adapter» is constructed. A mathematical model is presented in the form of the initial-boundary value problem for a system of two differential equations with two unknown functions. The uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem is proved by energy equalities and inequalities and then is constructed the formula of approximate solution by method of successive approximations. The formula of approximate solution allows to investigate the process of heat exchange between the air and the adapter quantitatively and qualitatively and to develop a computer virtual model of accumulation of heat. Graphics shows the desired functions.

Keywords: accumulation and recovering of the heat energy, initial-boundary value problem, uniqueness of the solution, approximate solution

В статье рассматривается математическая модель процесса аккумуляции тепловой энергии в стационарном переключающемся регенеративном теплоутилизаторе (СПРТ) [1]. Под СПРТ понимается автономное вентиляционное устройство, имеющее в своем составе регенеративный теплообменник, устанавливаемое в конструкцию стены или окна и обслуживающее одно или два смежных помещения. В статье рассматривается регенеративный теплоутилизатор типа УВРК-50, в котором в качестве теплообменника используется регенеративная насадка из полиэтилена. Принцип работы теплоутилизатора типа УВРК-50 характеризуется двумя режимами работы: режим аккумуляции и режим регенерации. В режиме аккумуляции устройство работает на вытяжку и происходит нагрев регенеративной насадки внутренним вытяжным воздухом. В режиме регенерации устройство работает на приток и происходит нагрев приточного воздуха

насадкой. В данной статье рассматривается процесс аккумуляции тепловой энергии.

Для точного анализа термодинамических процессов, происходящих в регенеративной насадке устройства, требуется составление математической модели.

На данный момент недостаточно внимания уделяется теплообменникам типа СПРТ. Существующие математические модели разработаны либо для регенеративных теплоутилизаторов, работающих при высокой температуре теплоносителя [2], либо регенеративных теплоутилизаторов с роторной (вращающейся) насадкой [4]. Единственная математическая модель, разработанная для СПРТ, приведена в источнике [1]. Данная модель построена и численно исследована с помощью разностной схемы. Но такие вопросы, как существование и единственность решения, а также аналитические способы нахождения решения, пока не исследованы. Аналитический способ нахождения

решения задачи актуален с точки зрения разработки алгоритмов расчета тепловых характеристик процесса и оптимального управления работой теплоутилизатора.

Целью настоящей статьи является разработка математической модели процесса аккумуляции тепловой энергии в виде смешанной задачи, состоящей из системы двух дифференциальных уравнений; доказательство существования единственного решения смешанной задачи; составление приближенного решения смешанной задачи.

Разработка математической модели

Введем следующие обозначения: $T_B(\tau, z)$ – температура воздуха в момент времени τ в точке z , где $\tau \geq 0$, $0 \leq z \leq L$, °C; $T_H(\tau, z)$ – температура насадки в момент времени τ в точке z , где $\tau \geq 0$, $0 \leq z \leq L$, °C; $G_{ак}$ – расход воздуха на этапе аккумуляции, м³/ч; c_B – теплоемкость воздуха, кДж/кг·°C; ρ_B – плотность воздуха, кг/м³; S_B – площадь сечения канала, по которому проходит воздух, м²; Π – периметр сечения канала, по

которому проходит воздух, м; α – коэффициент теплоотдачи воздуха, Вт/м²·°C; T_{in} – температура помещения, откуда поступает тепловая энергия, °C; T_{out} – температура внешней среды, куда поступает часть тепловой энергии, °C; λ_H – теплопроводность материала насадки, Вт/м·°C.

Построим математическую модель процесса нагрева воздуха в проходном канале.

Для этого отметим, что $-G_{ак} c_B \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z)$ – количество тепла, поступающего в проходное сечение в точке z в момент времени τ ; $c_B \rho_B S_B \frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z)$ – количество тепла, затрачиваемое на нагревание проходного сечения в точке z в момент времени τ ; $\Pi \alpha (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z))$ – количество тепла, передаваемого от воздуха насадке в проходном сечении в точке z в момент времени τ .

Уравнение баланса тепловой энергии в проходном сечении в точке z в момент времени τ :

$$-G_{ак} c_B \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z) = c_B \rho_B S_B \frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z) + \Pi \alpha (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)); \tau > 0, 0 < z < L. \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой математическую модель процесса нагрева воздуха в проходном канале. При этом необходимо учитывать начальное условие

$$T_B(0, z) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} \cdot z, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (2)$$

т.е. в начальный момент времени температура в проходном канале распределена линейно между T_{in} и T_{out} , а также граничное (краевое) условие

$$T_B(\tau, 0) = T_{in}, \quad \tau \geq 0, \quad (3)$$

т.е. на левом конце проходного канала температура все время постоянна и равна комнатной T_{in} .

Таким образом, получаем начально-краевую (смешанную) задачу (1), (2), (3) для неизвестной функции $T_B(\tau, z)$.

$$\Pi \alpha (T_B - T_H) = c_H \rho_H S_H \frac{\partial T_H}{\partial \tau} - \lambda_H S_H \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < z < L. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой математическую модель процесса нагрева насадки. Необходимо учитывать начальное условие

$$T_H(0, z) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} \cdot z, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (5)$$

Теперь построим математическую модель процесса нагрева насадки. В процессе нагрева насадки $\Pi \alpha (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z))$ – количество тепловой энергии, поступающее от воздуха насадке в проходном сечении в точке z в момент времени τ ; $c_H \rho_H S_H \frac{\partial T_H}{\partial \tau}(\tau, z)$ –

количество тепловой энергии, расходуемое на нагревание насадки в точке z в момент

времени τ ; $-\lambda_H S_H \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}(\tau, z)$ – количество тепловой энергии, перемещаемое внутри насадки по закону Фурье.

Уравнение баланса тепловой энергии в поперечном сечении насадки в точке z в момент времени τ :

т.е. в начальный момент времени температура в насадке распределена линейно между T_{in} и T_{out} и граничные (краевые) условия

$$\frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, 0) = 0, \quad \frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, L) = 0, \quad \tau > 0. \quad (6)$$

т.е. концы насадки изолированы все время. Таким образом, получаем начально-краевую (смешанную) задачу (4), (5), (6) для неизвестной функции $T_H(\tau, z)$.

Смешанная задача (1)–(6) есть математическая модель процесса аккумуляции тепловой энергии в термодинамической системе «воздух – насадка».

Единственность решения

Решением начально-краевой задачи (1)–(6) назовем пару функций $T_B(\tau, z) \in C^1((0, +\infty) \times (0, L))$,

$T_H(\tau, z) \in C^{1,2}((0, +\infty) \times (0, L))$, являющуюся решением системы уравнений (1), (4), и удовлетворяющую начальным условиям (2), (5) и краевым условиям (3), (6). Общеизвестным методом энергетических равенств и неравенств ([3]) докажем, что решение $(T_B(\tau, z), T_H(\tau, z))$ смешанной задачи (1)–(6) единственно. Для этого достаточно показать, что если начальные значения $T_B(0, z)$, $T_H(0, z)$ и граничное значение $T_B(0, z)$ тождественно равны нулю, то функции $T_B(\tau, z)$ и $T_H(\tau, z)$ также тождественно равны нулю.

В силу уравнений (1) и (4) имеем

$$c_B \rho_B S_B \frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z) + G_{ак} c_B \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z) = -\text{Па} (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z));$$

$$c_H \rho_H S_H \frac{\partial T_H}{\partial \tau}(\tau, z) - \lambda_H S_H \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}(\tau, z) = \text{Па} (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)).$$

Первое равенство умножим на $T_B(\tau, z)$, второе – на $T_H(\tau, z)$, затем сло-

жим их и проинтегрируем по z в пределах от 0 до L :

$$\int_0^L \left(c_B \rho_B S_B \frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z) T_B(\tau, z) + c_H \rho_H S_H \frac{\partial T_H}{\partial \tau}(\tau, z) T_H(\tau, z) \right) dz +$$

$$+ G_{ак} c_B \int_0^L \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z) T_B(\tau, z) dz - \lambda_H S_H \int_0^L \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}(\tau, z) T_H(\tau, z) dz =$$

$$= \text{Па} \int_0^L (-T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)) T_B(\tau, z) + (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)) T_H(\tau, z) dz.$$

Заметим, что

$$1) \int_0^L \left(c_B \rho_B S_B \frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z) T_B(\tau, z) + c_H \rho_H S_H \frac{\partial T_H}{\partial \tau}(\tau, z) T_H(\tau, z) \right) dz =$$

$$= \int_0^L \left(c_B \rho_B S_B \frac{1}{2} \frac{\partial T_B^2}{\partial \tau}(\tau, z) + c_H \rho_H S_H \frac{1}{2} \frac{\partial T_H^2}{\partial \tau}(\tau, z) \right) dz =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(\tau, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(\tau, z)) dz;$$

$$2) G_{ак} c_B \int_0^L \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z) T_B(\tau, z) dz = G_{ак} c_B \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial T_B^2}{\partial z}(\tau, z) dz =$$

$$= \frac{1}{2} G_{ак} c_B T_B^2(\tau, z) \Big|_{z=0}^{z=L} = \frac{1}{2} G_{ак} c_B T_B^2(\tau, L) - \frac{1}{2} G_{ак} c_B T_B^2(\tau, 0);$$

$$3) -\lambda_H S_H \int_0^L \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}(\tau, z) T_H(\tau, z) dz = -\lambda_H S_H \left(\frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, z) T_H(\tau, z) \Big|_{z=0}^{z=L} - \right.$$

$$\left. - \int_0^L \left(\frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, z) \right)^2 dz \right) = \lambda_H S_H \int_0^L \left(\frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, z) \right)^2 dz \quad \text{в силу граничных}$$

условий (6);

$$4) -(T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)) T_B(\tau, z) + (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z)) T_H(\tau, z) = -(T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z))^2.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(\tau, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(\tau, z)) dz = -\frac{1}{2} G_{ак} c_B T_B^2(\tau, L) + \\ & + \frac{1}{2} G_{ак} c_B T_B^2(\tau, 0) - \lambda_H S_H \int_0^L \left(\frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, z) \right)^2 dz - \Pi \alpha \int_0^L (T_B(\tau, z) - T_H(\tau, z))^2 dz. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $T_B(\tau, 0) \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(\tau, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(\tau, z)) dz \leq 0 \text{ при } \tau > 0, \\ & \int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(\tau, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(\tau, z)) dz \leq \\ & \leq \int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(0, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(0, z)) dz, \text{ при } \tau > 0. \end{aligned}$$

Если к тому же $T_B(0, z) \equiv 0$ и $T_H(0, z) \equiv 0$, то

$$\int_0^L (c_B \rho_B S_B T_B^2(\tau, z) + c_H \rho_H S_H T_H^2(\tau, z)) dz \leq 0.$$

Значит, $T_B(\tau, z) \equiv 0$ и $T_H(\tau, z) \equiv 0$. Единственность решения доказана.

Приближенное решение

Смешанную задачу (1)–(6) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial T_B}{\partial \tau}(\tau, z) + a \frac{\partial T_B}{\partial z}(\tau, z) + b T_B(\tau, z) = b T_H(\tau, z), \quad \tau > 0, \quad 0 < \tau < L, \quad (7)$$

$$T_B(0, z) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} \cdot z, \quad 0 \leq \tau \leq L, \quad T_B(\tau, 0) = T_{in}, \quad \tau \geq 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial \tau}(\tau, z) - c \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2}(\tau, z) + d T_H(\tau, z) = d T_B(\tau, z), \quad \tau > 0, \quad 0 < \tau < L, \quad (9)$$

$$T_H(0, z) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} \cdot z, \quad 0 \leq \tau \leq L, \quad \frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, 0) = 0; \quad \frac{\partial T_H}{\partial z}(\tau, L) = 0, \quad \tau > 0, \quad (10)$$

где

$$a = \frac{G_{ак}}{\rho_B S_B}; \quad b = \frac{\Pi \alpha}{c_B \rho_B S_B}; \quad c = \frac{\lambda_H}{c_H \rho_H}; \quad d = \frac{\Pi \alpha}{c_H \rho_H S_H}.$$

В силу (7) и (8) функцию $T_B(\tau, z)$ можно выразить функцией $T_H(\tau, z)$:

$$T_B(\tau, z) = \Phi_B T_H(\tau, z), \quad (11)$$

$$\text{где } \Phi_B T_H(\tau, z) = \begin{cases} e^{-b\tau} \left(T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} (z - a\tau) \right) + b \int_0^\tau e^{b(s-\tau)} T_H(s, z + a(s-\tau)) ds, & z \geq a\tau, \\ e^{-\frac{b}{a}z} T_{in} + b \int_{\tau - \frac{z}{a}}^\tau e^{b(s-\tau)} T_H(s, z + a(s-\tau)) ds, & z < a\tau. \end{cases}$$

В силу (9) и (10) функцию $T_H(\tau, z)$ можно выразить функцией $T_B(\tau, z)$:

$$T_H(\tau, z) = \Phi_H T_B(\tau, z), \quad (12)$$

где

$$\Phi_H T_B(\tau, z) = \int_0^L G(\tau, z, \eta) \left(T_{in} - \frac{T_{in} - T_{out}}{L} \eta \right) d\eta + d \int_0^\tau \int_0^L G(\tau - s, z, \eta) T_B(s, \eta) d\eta ds;$$

$$G(\tau, z, \eta) = \frac{1}{L} \left(e^{-\beta_0 \tau} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_k \tau} \cos \frac{\pi k}{L} z \cos \frac{\pi k}{L} \eta \right); \quad \beta_k = d + c \left(\frac{\pi k}{L} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Интегральные представления (11) и (12) выводятся из общеизвестных формул решения смешанных задач вида (7), (8) и (9), (10) (см., напр., [5]).

Таким образом, смешанная задача (7)–(10) равносильна системе интегральных уравнений (11), (12). Систему (11), (12) решим методом последовательных приближений ([5]). А именно построим следующие последовательности функций:

$$T_H^{(0)}(\tau, z) = T_{in};$$

$$T_B^{(n)}(\tau, z) = \Phi_B T_H^{(n-1)}(\tau, z);$$

$$T_H^{(n)}(\tau, z) = \Phi_H T_B^{(n)}(\tau, z). \quad (13)$$

Последовательность функций $(T_H^{(n)}(\tau, z), T_B^{(n)}(\tau, z)), \quad n = 1, 2, \dots$ сходится

к решению $(T_H(\tau, z), T_B(\tau, z))$ смешанной задачи (7)–(10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_H^{(n)}(\tau, z) = T_H(\tau, z);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_B^{(n)}(\tau, z) = T_B(\tau, z).$$

Поэтому при больших номерах n пару функций $(T_H^{(n)}(\tau, z), T_B^{(n)}(\tau, z))$ можно взять в качестве приближенного решения $(T_H(\tau, z), T_B(\tau, z))$ смешанной задачи (7)–(10):

$$T_H(\tau, z) \approx T_H^{(n)}(\tau, z);$$

$$T_B(\tau, z) \approx T_B^{(n)}(\tau, z).$$

При больших номерах n и фиксированных моментах времени τ графики функций $T_H^{(n)}(\tau, z), T_B^{(n)}(\tau, z)$ представлены на рис. 1 и 2.

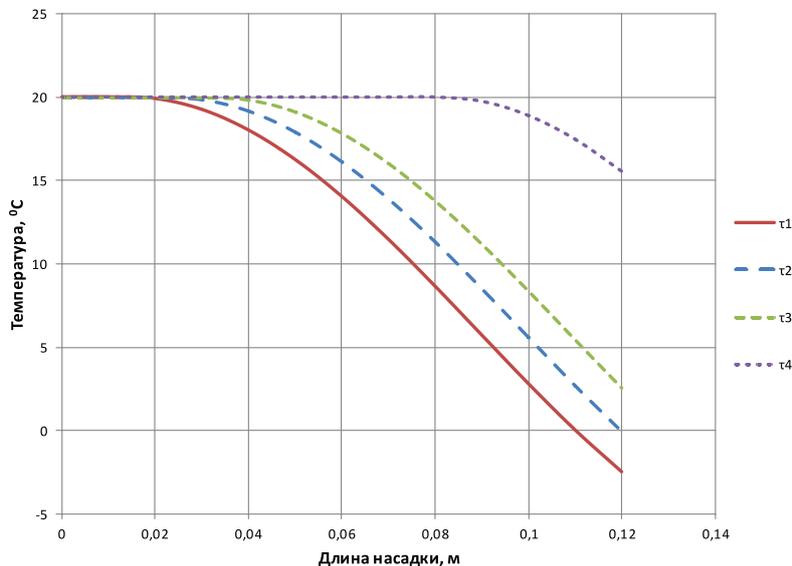


Рис. 1. График зависимости изменения температуры воздуха от длины насадки при четырех фиксированных моментах времени τ

В итоге работы можно сделать вывод, что графические результаты по предложенной математической мо-

дели в определенной мере отвечают реальным процессам теплообмена в СПРТ.

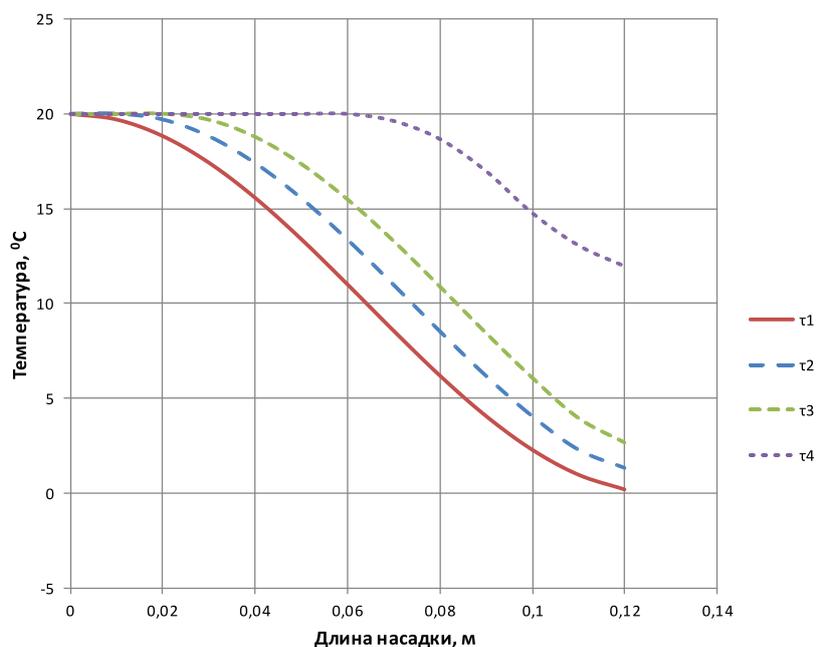


Рис. 2. График зависимости изменения температуры насадки от длины насадки при четырех фиксированных моментах времени τ

Необходимо отметить, что в рассмотренной модели коэффициент теплоотдачи воздуха α считается известной величиной. Но в реальности величина α существенно зависит от потока воздуха $G_{\text{ак}}$ и самого процесса нагрева, поэтому было бы естественным величиной α также считать неизвестной. В этом случае математическую модель нужно скорректировать так, чтобы величину α можно было однозначно находить наряду с неизвестными функциями ТВ и ТН. Для этого необходимо ввести дополнительное условие, позволяющее находить α .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках выполнения государственного задания высшим учебным заведениям.

Список литературы

1. Васильев В.А. Методы расчета тепловых процессов в стационарном переключающемся регенеративном теплоутилизаторе: дис. ... канд. техн. наук: 05.04.03. – СПб., 2010. – 136 с.
2. Кирсанов Ю.А., Волченко К.М., Низамова А.Ш. Математическая модель регенеративного воздухоподогревателя для исследования теплоотдачи пакета параллельных твердых тел // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – Казань, 1999. – № 9–10. – С. 3–10.
3. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ, 2005. – 260 с.
4. Регенеративные вращающиеся воздухоподогреватели / В.К. Мигаев, В.С. Назаренко, И.Ф. Новожилов, Т.С. Добряков. – Л.: Энергия, 1971. – 168 с.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

References

1. Vasil'ev, V.A. *Metody rascheta teplovykh processov v stacionarnom pereklyuchajushhemsja regenerativnom teploutilizatore* [Methods for calculating thermal processes in a stationary switches regenerative heat exchanger]. Dissertation of the candidate of technical sciences: 05.04.03. St. Petersburg, 2010. 136 p.
2. Kirsanov Ju.A., Volchenko K.M., Nizamova A.Sh. *Izvestija vysshih uchebnykh zavedenij. Problemy jenergetiki*. Kazan'. 1999, no. 9–10, pp. 3–10.
3. Olejnik O.A. *Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on partial differential equations]. Moscow, BINOM, 2005. 260 p.
4. *Regenerativnye vrashhajushhiesja vozduhopodogrevately* [Regenerative rotary air heaters] / Migaj V.K., Nazarenko V.S., Novozhilov I.F., Dobryakov T.S. Leningrad, Energy, 1971. 168 p.
5. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnenija matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Science, 1977. 736 p.

Рецензенты:

Горбунов В.А., д.ф.-м.н., профессор, главный специалист Общества с ограниченной ответственностью Научно-производственный центр «ЭнергоКИТ», г. Вологда;
Игонин В.И., д.т.н., профессор, главный конструктор Общества с ограниченной ответственностью Научно-производственный центр «Информационные и энергетические технологии» (малое инновационное предприятие ООО НПЦ «Инэнтех»), г. Вологда.
Работа поступила в редакцию 17.10.2014.