

УДК 004.942: 681.527.8

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА ИСПОЛНИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МАТЕРИАЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Гречихин В.В., Лозин О.И., Кудря А.В., Кудря Н.А., Шайхутдинов Д.В., Январев С.Г.

*ФГБОУ ВПО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова», Новочеркасск, e-mail: vgrech@mail.ru*

Статья посвящена разработке математических моделей для исследования технических систем на основе новых интеллектуальных материалов. Рассматривается исполнительная система, построенная с применением активного элемента из ферромагнитного материала с памятью формы и распределенной намагничивающей катушки. Показано, что неэффективно используются возможности материала – изменение линейных размеров от воздействия магнитного поля вследствие неравномерного намагничивания активного элемента. Предложена математическая модель, позволяющая оценить деформацию активного элемента из полностью сжатого состояния при максимальной относительной деформации элемента под воздействием магнитного поля. Разработана модель, учитывающая остаточную деформацию, нелинейную зависимость деформации от приложенного магнитного поля и неравномерность намагничивания активного элемента. Приведен пример моделирования деформации активного элемента исполнительной системы. Полученные результаты позволяют повысить точность определения параметров исполнительных систем на основе ферромагнитных материалов с памятью формы при натурно-модельных испытаниях.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, исполнительная система, ферромагнитный материал с памятью формы, намагничивание, деформация

## MATHEMATICAL MODELING OF STRAIN OF ACTIVE ELEMENT MAGNETIC SHAPE MEMORY ACTUATORS

Grechikhin V.V., Lozin O.I., Kudrya A.V., Kudrya N.A., Shaykhtudinov D.V., Yanvarev S.G.

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional University «Platov South-Russian State Polytechnic University», Novocherkassk, e-mail: vgrech@mail.ru*

The article is devoted to the development of mathematical models for the study of technical systems based on the new smart materials. The actuator constructed with application of an active element of magnetic shape memory alloy and the distributed magnetizing coil is considered. It is shown that possibilities of material – change of the linear sizes from influence of a magnetic field owing to uneven magnetization of an active element are inefficiently used. The mathematical model allowing to estimate strain of an active element from completely squeezed state at the maximum relative strain of an element under the influence of a magnetic field is offered. The model considering residual strain, nonlinear dependence of strain on the enclosed magnetic field and unevenness of magnetization of an active element is developed. The example of modeling of strain of an active element of actuator is given. The received results allow to increase the accuracy of determination of parameters of magnetic shape memory alloy actuators at full-scale modeling tests.

**Keywords:** mathematical modeling, actuator, magnetic shape memory alloy, magnetization, strain

Исполнительные системы составляют основу промышленных систем управления. К ним предъявляются повышенные требования, обусловленные, как правило, тяжелыми условиями эксплуатации, необходимостью обеспечения точного управления технологическими процессами и надежностью. Характеристики и параметры систем зависят от свойств используемых материалов. В настоящее время возможности «традиционных» материалов во многом уже полностью реализованы. Однако разработаны и начинают широко использоваться «интеллектуальные» материалы, которые могут контролируемым образом преобразовывать один вид энергии в другой. К ним в полной мере относятся и ферромагнитные материалы с памятью формы (ФМПФ). Они обладают высокой чувствительностью и возможностью изменять геометрические размеры

в широком диапазоне под воздействием магнитных и механических сил [2, 3]. Это позволяет упростить конструкцию исполнительных устройств, повысить точность преобразования, а также сократить количество составных частей, подверженных поломке или изнашиванию. Сложный характер происходящих в ФМПФ физических процессов и недостаточно развитая теоретическая база для проектирования приводят к тому, что значительные возможности этих материалов используются не в полной мере. Известны, как правило, опытные образцы устройств, изготовленных с применением ФМПФ [4, 5]. Анализ работ показывает, что проводятся испытания и определяются свойства отдельных образцов ФМПФ и, как правило, не учитывается их определяющее влияние на характеристики и параметры исполнительных систем. В этой связи

разработка математических моделей для исследования и диагностирования исполнительных систем, построенных на основе ФМПФ, является актуальной задачей.

**Цель работы:** разработка математических моделей деформации активного элемента исполнительных системы на основе ФМПФ.

**Материал и методы исследований:** методы математического анализа, математического моделирования, численные методы интегрирования, численные методы решения алгебраических уравнений теории измерений.

### Результаты исследований и их обсуждение

Предлагается исполнительная система, построенная с применением активного элемента (АЭ) из ФМПФ и распределенной намагничивающей катушкой, состоящей из ряда катушек малого размера. Используется режим импульсного перемагничивания АЭ с возможностью регулирования величины напряженности магнитного поля. АЭ, представляющий собой стержень в виде параллелепипеда, намагничивается неравномер-

но. Тем самым неэффективно используются возможности ФМПФ – изменение линейных размеров от воздействия магнитного поля. Поэтому для диагностики и управления процессами деформации АЭ предлагаются математические модели, учитывающие эти особенности.

Упрощенная схема линейного привода исполнительных системы показана на рис. 1, где 1 – недеформированный АЭ из ФМПФ, закрепленный на одном конце и управляемый магнитным полем, задаваемым токами в катушках 2. Устройство характеризуется следующими параметрами:  $N$  – число катушек,  $L_0$  – полная длина недеформированного АЭ,  $l$  – протяженность зоны действия магнитного поля, создаваемого катушкой,  $l \ll L_0$ . Протяженность зоны действия катушки связана с длиной АЭ следующим образом:  $l = \kappa L_0$ ,  $\kappa < N^{-1}$ . Неоднородностью магнитного поля в образце в зоне действия одной катушки пренебрегаем. Считается, что участки, деформированные воздействием магнитного поля какой-либо катушки, не заходят в область воздействия других катушек.

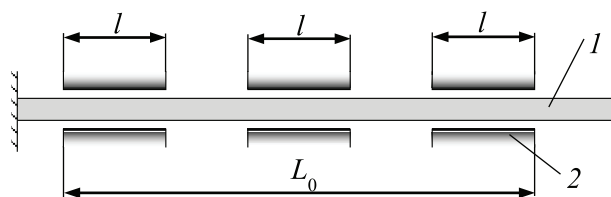


Рис. 1. Упрощенная схема линейного привода исполнительных системы

В рамках рассматриваемой модели предполагается, что деформация происходит следующим образом: за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  области образца, подвергающиеся действию создаваемого катушками поля, удлиняются на максимально возможную величину. Удлинение каждой из областей при этом составит  $\lambda l$ , где  $\lambda$  – максимальная относительная деформация АЭ под воздействием магнитного поля. Полная деформация за время  $\Delta t$  составит

$$\varepsilon^{(1)} = N\lambda l.$$

В результате описанной деформации в зону действия катушек заходят недеформированные участки АЭ (см. рис. 2). На следующем «такте», т.е. за очередной промежуток времени  $\Delta t$ , эти участки удлинятся на  $\lambda^2 l$ ,  $2\lambda^2 l$ ,  $3\lambda^2 l$  и т.д. Окончательное значение деформации находится суммированием соответствующих значений за все время деформации:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \dots$$

Выписав выражение для  $\varepsilon$  в явном виде

$$\begin{aligned} \varepsilon = & (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots)\lambda l + \\ & + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots)\lambda^2 l + \\ & + (0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + \dots)\lambda^3 l + \\ & + (0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + \dots)\lambda^4 l + \\ & + (0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 5 + \dots)\lambda^5 l + \\ & + (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + \dots)\lambda^6 l + \\ & + \dots, \end{aligned}$$

легко заметить, что коэффициенты при  $\lambda^k l$  представляют собой числа, составляющие треугольник Паскаля. Таким образом, величина деформации легко вычисляется для образца, управляемого любым количеством катушек.

Соотношение между деформациями на  $k$ -м и  $(k - 1)$ -м тактах равно  $\lambda^k / \lambda^{(k-1)} = \lambda$ . Поэтому для рассматриваемых материалов предлагаемая модель позволяет повысить точность расчета приблизительно на 10%

по сравнению с расчетом, учитывающим только область АЭ в зоне действия катушек.

Погрешность описанной модели, возникающая вследствие того, что деформация до максимального значения происходит не

мгновенно, большей частью компенсируется за счет того, что вошедшие в зоны действия катушек участки АЭ находятся в этих зонах на протяжении всей дальнейшей деформации и успевают деформироваться до максимума.

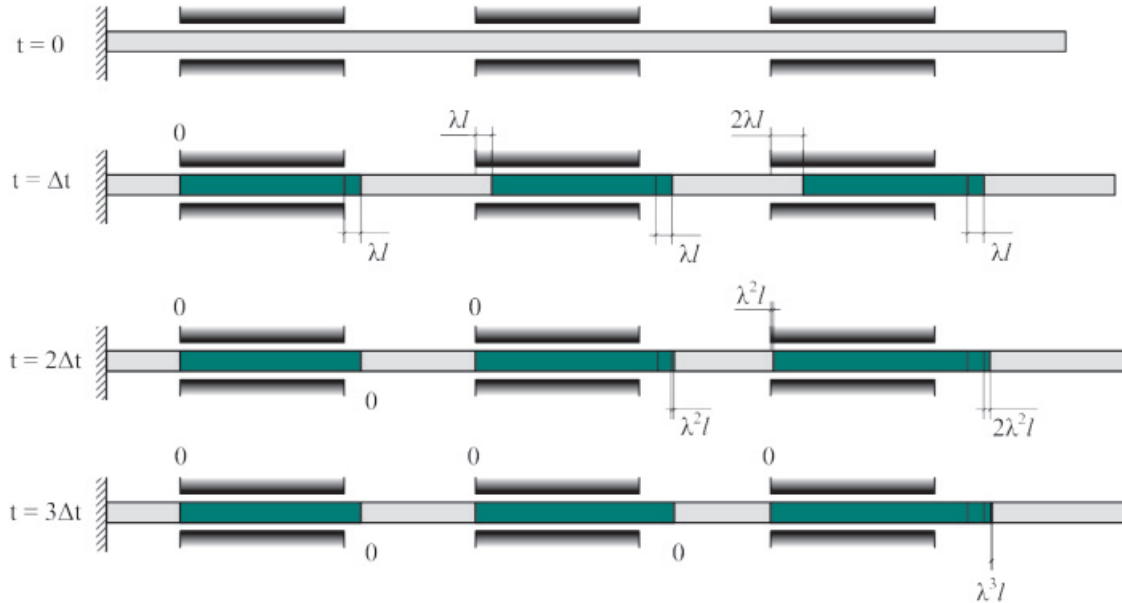


Рис. 2. Деформация активного элемента

После нескольких циклов работы АЭ в нем появляются остаточные деформации, учет которых требует усложнения модели. Относительная деформация на момент начала удлинения теперь не считается равной нулю во всем АЭ, а описывается функцией от координаты  $x$  (координата отсчитывается

от места закрепления стержня). Для простоты будем считать, что эта функция  $\lambda^{(0)}(x)$  принимает значения 0 и 1, отвечающие соответственно отсутствию деформации и полной деформации. Образец с остаточной деформацией изображен на рис. 3, деформированные участки заштрихованы.

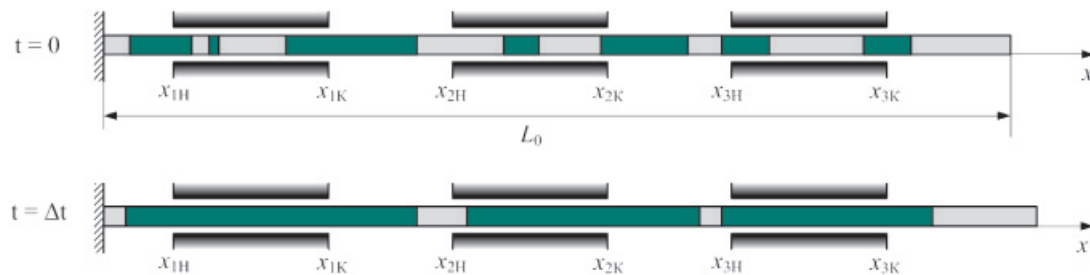


Рис. 3. АЭ с остаточной деформацией

Модель не требует ограничений на попадание участков, деформированных под воздействием одних катушек, в зоны влияния других. Деформация участка образца, попавшего под действие  $j$ -й катушки, на первом такте выражается следующей формулой:

$$\epsilon_j^{(1)} = \frac{\epsilon_m}{L_0} \int_{x_{jH}}^{x_{jK}} (1 - \lambda^{(0)}(x)) dx,$$

где  $\epsilon_m$  – максимальная абсолютная деформация образца;  $x_{jH}$ ,  $x_{jK}$  – границы зоны действия  $j$ -й катушки. После первого «такта» относительная деформация будет выражаться уже новой функцией  $\lambda^{(1)}(x)$ , которая будет исходной для нахождения удлинения на втором такте, и аналогично для последующих тактов. Таким образом, деформация, вызванная воздействием  $j$ -й катушки на  $k$ -м «такте», равна

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\epsilon_m}{L_0} \int_{x_{jH}}^{x_{jK}} (1 - \lambda^{(k-1)}(x)) dx. \quad (1)$$

Неудобством такого метода является необходимость построения новой функции  $\lambda^{(k)}(x)$  на каждом такте. Примем допущение: участки, деформированные после  $t = 0$ , за все время деформации не попадают в зоны действия катушек. При этом на каждом такте интегрирование в формулах (1) можно производить не по зоне действия катушек, а по участкам, попавшим в зоны действия на предыдущем такте. Тогда деформация на этих участках будет описываться функцией  $\lambda^{(0)}(x)$  и для вычисления  $\epsilon_j^{(k)}$  достаточно лишь соответствующим образом выбрать пределы интегрирования.

Дальнейшее уточнение модели деформации образца должно происходить путем учета вида зависимости деформации от приложенного магнитного поля  $H$  для конкретного материала АЭ, а также зависимости  $\phi(x)$ , описывающей распределение поля, создаваемого катушками в АЭ. В этом случае выражение (1) принимает вид

$$\epsilon = \sum_k \delta H_k \cdot \int_0^L \lambda_k(x, H, \phi(x)) dx,$$

где  $\lambda_k(x, H, \phi(x))$  – функция, описывающая удельную деформацию АЭ на  $k$ -м шаге изменения магнитного поля;  $\delta H_k$  – приращение магнитного поля на  $k$ -м шаге;  $L$  – область АЭ, в которой присутствует поле, создаваемое катушками. В общем случае поле присутствует во всем АЭ, и тогда  $L$  равно длине АЭ на  $k$ -м шаге изменения магнитного поля  $L_k$ .

Выполним моделирование деформации АЭ исполнительной системы под воздействием напряженности магнитного поля, создаваемого шестью катушками, с помощью предложенной модели.

Зависимость деформации от напряженности магнитного поля  $\epsilon(H)$  аппроксимируем подобно тому, как это делается для магнитного гистерезиса у ферромагнетиков [1]. Для этого используем функции

$$\epsilon_l(H) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_m \cdot \{1 + \text{th}[a(H - H_{il})]\}; \quad (2)$$

$$\epsilon_h(H) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_m \cdot \{1 + \text{th}[a(H - H_{ih})]\}, \quad (3)$$

описывающие соответственно нижнюю и верхнюю ветви петли гистерезиса. В этих формулах  $\epsilon_m$  – максимальная деформация; параметр  $a$  определяет крутизну петли гистерезиса;  $H_{il}$  и  $H_{ih}$  – значения напряженности магнитного поля, соответствующие точкам перегиба нижней и верхней ветвей. Указанные параметры подбираются исходя из вида экспериментальной зависимости  $\epsilon(H)$  для данного материала.

Распределение напряженности по длине АЭ в указанной системе по экспериментальным данным показано на рис. 4. Представим это распределение с помощью нормированной на единицу функции вида

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{h_1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}, & L_1 \leq x \leq L_2; \\ 1 - h_1, & x < L_1, \quad x > L_2, \end{cases}$$

где  $l$  – расстояние между центрами катушек;  $h_1$  – параметр, характеризующий неоднородность поля (для рассматриваемой системы  $h_1$  составляет около 0,2),  $L_1 = x_1 - (l/2)$ ,  $L_2 = x_1 + (N - 1)l + (l/2)$ ,  $N$  – число катушек (в рассматриваемом случае  $N = 6$ );  $x_1$  – координата центра первой катушки.

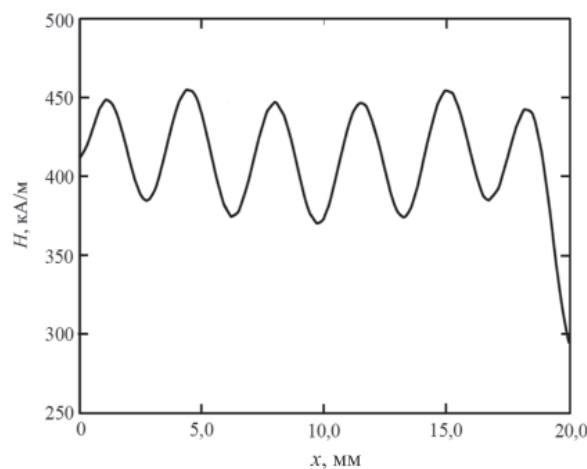


Рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля в АЭ

Выражение для напряженности магнитного поля в АЭ в зависимости от координаты  $x$  получается умножением функции  $\phi(x)$  на величину напряженности  $H_m$  в точках

ты  $x$  получается умножением функции  $\phi(x)$  на величину напряженности  $H_m$  в точках

АЭ, соответствующих центрам катушек  $x_k$ . Используя ту же аппроксимирующую функцию, что и для получения формул (2) и (3), получим для распределения удельной деформации по длине образца без начальной

деформации после первого такта удлинения выражение

$$\lambda(x, H, \phi(x)) = \frac{1}{2} \cdot \{1 + \text{th}[a(H_m \phi(x) - H_{il})]\}.$$

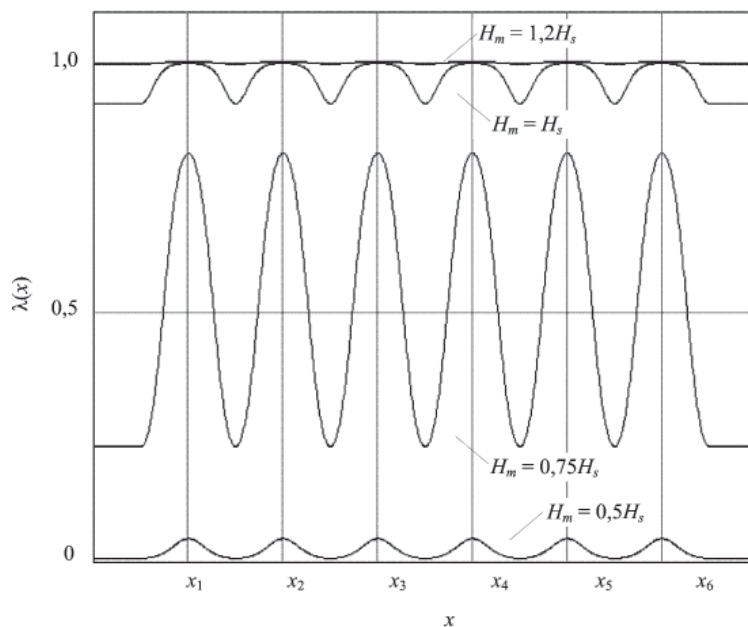


Рис. 5. Распределение удельной деформации  $\lambda(x)$  по длине АЭ

Графики зависимости удельной деформации от координаты  $x_k$  при различных значениях  $H_m$  представлены на рис. 5. На рисунке  $H_s$  – напряженность насыщения магнитного поля АЭ.

### Заключение

Предложены математические модели для определения деформации АЭ в условиях его неравномерного намагничивания. Применение моделей позволяет учитывать начальное состояние АЭ и его остаточную деформацию. Полученные результаты позволяют повысить точность определения параметров исполнительных систем на основе ферромагнитных материалов с памятью формы при натурно-модельных испытаниях.

Результаты работы получены при поддержке гранта РФФИ № 14-08-01288 «Разработка теории натурно-модельных испытаний измерительных и исполнительных систем, построенных на основе ферромагнитных материалов с эффектом памяти формы».

### Список литературы

1. Бозорт Р. Ферромагнетизм. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 784 с.
2. Ферромагнетики с памятью формы / А.Н. Васильев, В.Д. Бучельников, Т. Такаги [и др.] // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 7. – С. 577–608.
3. New materials for micro-scale sensors and actuators: an engineering review / S.A. Wilson, R.P. Jourdain, Q. Zhang [ets.], Materials Science & Engineering R-Reports. – 2007. – Vol. 56, № 6. – P. 1–129.

4. Suorsa I., Pagounis E., Ullakko K. Magnetic shape memory actuator performance // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2004. – Vol. 272. – P. 2029–2030.

5. Gauthier J., Hubert A., Abadie J., LExcellent C. Multistable actuator based on magnetic shape memory alloy // Actuator 2006: 10th International Conference on New Actuators, Bremen, Germany. 2006. – P. 787–790.

### References

1. Bozort R. Ferromagnetizm. – M.: Izd-vo inostr. lit., 1956. 784 p.
2. Vasil'ev A.N., Buchel'nikov V.D., Takagi T., Khovailo V.V., Estrin E.I. Shape memory ferromagnets, PHYS-USP, 2003, 46 (6), 559–588.
3. New materials for micro-scale sensors and actuators: an engineering review // S.A. Wilson, R.P.J. Jourdain, Q. Zhang [ets.], Materials Science & Engineering R-Reports. 2007. Vol. 56, no. 6, pp. 1–129.
4. Suorsa I., Pagounis E., Ullakko K. Magnetic shape memory actuator performance // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2004. Vol. 272. pp. 2029–2030.
5. Gauthier J., Hubert A., Abadie J., LExcellent C. Multistable actuator based on magnetic shape memory alloy // Actuator 2006: 10th International Conference on New Actuators, Bremen, Germany. 2006. pp. 787–790.

### Рецензенты:

Горбатенко Н.И., д.т.н., профессор, первый проректор, ФГБОУ ВПО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова», г. Новочеркасск;

Седов А.В., д.т.н., доцент, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика», ФГБОУ ВПО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова», г. Новочеркасск.

Работа поступила в редакцию 17.10.2014.