УДК 519.65

ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рагимханова Г.С., Агаханов С.А., Амиралиев А.Д., Гаджиагаев Ш.С.

ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», Махачкала, e-mail: gulnara_6789@mail.ru

Численными методами аппроксимированы функции, являющиеся решениями дифференциальных уравнений, получаемые в качестве моделей технических задач и допускающие разложения в цепную дробь. Разработана программа на языке Turbo Pascal для нахождения значений тригонометрических функций sin x, cos x, используя связь sin x и cos x с tg x/2, с использованием подходящих дробей цепных дробей и указаны приближенные значения данных функций с точностью до шестнадцатого знака. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, связанных с разложениями функций в цепные дроби, при численном решении дифференциальных уравнений, где вопросы скорости сходимости играют важную роль. Они представляют интерес для специалистов по математической и теоретической физике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, специальным функциям математической физики и их приложениям. Полученные результаты могут применяться при численном анализе математических моделей различных естественнонаучных задач, связанных с динамикой явления.

Ключевые слова: цепная дробь, тригонометрические функции, приближение

APPROXIMATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS USING ONE FRACTION USING THE PROGRAMMING ENVIRONMENT

Ragimkhanova G.S., Agakhanov S.A., Amiraliev A.D., Gadzhiagaev S.S.

Dagestan state pedagogical University, Makhachkala, e-mail: gulnara_6789@mail.ru

Numerical methods approximated function which are solutions of the differential equations obtained as models of engineering problems and allow decomposition into a continued fraction. Developed a program in Turbo Pascal for finding values of trigonometric functions sin x, cos x, using the relation sin x and cos x tg x/2, using the appropriate fractions continued fractions and indicated the approximate values of these functions with accuracy up to the sixteenth character. The obtained results can be used in further studies related to the expansion of functions in continued fractions, for the numerical solution of differential equations, where the issues of speed of convergence plays an important role. They are of interest for specialists in mathematical and theoretical physics, mathematical analysis, differential equations, special functions of mathematical physics and their applications. The obtained results can be used in numerical analysis of mathematical models of various scientific problems associated with the dynamics of the phenomenon.

Keywords: a continued fraction, trigonometric functions, approximation

Как известно, понятие «функция» в чистой и прикладной математике имеет различное содержание. В первом случае оно воспринимается как конкретное выражение одной переменной через другую; изучение функции сводится к изучению различных свойств этого выражения. В прикладной математике «функция», прежде всего, есть конечная последовательность арифметических действий, с помощью которых из заданного значения одной переменной можно получить значение другой переменной. «Функция» прикладной математики является моделью «функции» чистой математики. Замечательно, что есть множество функций, которые сами по себе являются моделями. Таким множеством является линейное пространство всех алгебраических многочленов или отношений многочленов.

Одной и той же функции можно сопоставить различные модели, выбор которой зависит от решаемой задачи. Для широкого класса функций с точки зрения возможности получения их значений с наперед заданной точностью за наименьшее количество арифметических действий (за наименьшее машинное время) наилучшими моделями являются подходящие дроби цепных дробей [7].

В настоящее время повышение интереса к теории цепных дробей объясняется еще и тем, что, несмотря на видимую громоздкость представления, процесс их вычислений является цикличным и легко поддаётся программированию при использовании ЭВМ.

1. Цепной (непрерывной) дробью, называется выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots}}. \qquad (1)$$

Из-за громоздкости записи (1) цепная дробь записывается так:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\ \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_n}{b_n +} \cdots, \quad b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \quad b_0 + \Phi\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \tag{1}$$

где $\frac{a_k}{b_k}$ – k-е звено цепной дроби; a_k и b_k – члены k-го звена; a_k – частные числители, b_k – частные знаменатели цепной дроби. Будем считать $b_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Конечная цепная дробь

$$b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{P_n}{Q_n} = f_n$$

называется n-й подходящей дробью цепной дроби (1); P_n – числители; Q_n – знаменатели подходящей дроби f_n [4].

Имеют место рекуррентные соотношения (установлены Валлисом (1655 г.) и подробно изучались Эйлером (1737 г.))

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2};$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \tag{2}$$

$n = 1, 2, \ldots$. При этом $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ [4].

2. Известно ([1]), что для $|z| < \frac{\pi}{2}$ функция $\mathrm{tg}\, z$ разлагается в степенной ряд

$$\mathrm{tg} z = 2\sum_{k=1}^{\infty} \xi(2k)\frac{2^{2k-1}}{\pi^{2k}} Z^{2k-1}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Здесь $\xi(z)$ – дзета функция Римана.

В ([6]) доказано: для комплексных $z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k-целое, справедливо разложение в цепную дробь

$$\mathrm{tg} z = \frac{z}{1-}\ \frac{z^2}{3-}\ \ldots\ \frac{z^2}{-2n-1-}\ \ldots \tag{3}$$

Если $P_n(z)/Q_n(z)$ – подходящая дробь порядка n цепной дроби (1), то $Q_{2k}(z)$, $Q_{2k+1}(z)$, $zP_{2k-1}(z)$, $zP_{2k}(z)$ будут многочленами степени $2k$. Так как $Q_1(z) = 1$, $Q_2(z) = 3 - z^2$, то из ([2])

$$Q_n(z) = (2n-1)Q_{n-1}(z) - z^2 Q_{n-2}(z)$$

следует

$$Q_3(z) = 15 - 6z^2;$$

$$Q_4(z) = 105 - 45z^2 + z^4;$$

$$Q_5(z) = 945 - 420z^2 + 15z^4;$$

$$Q_6(z) = 10395 - 4725z^2 + 210z^4 - z^6;$$

$$Q_7(z) = 135135 - 6237z^2 + 3150z^4 - 28z^6.$$

Заметим еще, что если $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} - \frac{1}{n^2}$, то $\varepsilon_2 = 0{,}75$, $\varepsilon_3 = 0{,}64$, $\varepsilon_4 = 0{,}54$, $\varepsilon_5 = 0{,}50$, $\varepsilon_6 = 0{,}48$, $\varepsilon_7 = 0{,}46$. Здесь значения ε_n округлены. Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. Если при некотором x, $3x^2 < 5$ двойное неравенство

$$\varepsilon_n (2n-1)!! \le Q_n(x) \le (2n-1)!!. \tag{4}$$

имеет место для двух значений $n = k$ и $n = k + 1$, k – некоторое число, то при тех же значениях x (4) останется в силе и при $n = k + 2$.

Следствие. При $x^2 \le 1{,}13$ и $n \ge 1$ имеет место двойное неравенство

$$\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right)(2n-1)!! \le Q_n(x) \le (2n-1)!!. \tag{5}$$

Заметим, что ([7])

$$(2n-1)!! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

Теорема 2. При $x^2 \le 1{,}13$ будет

$$\left|\mathrm{tg} x - P_n(x)/Q_n(x)\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{n 4^n \Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

где $a_n \approx b_n$ означает: $0 < C_1 \le \frac{a_n}{b_n} \le C_2 < \infty$;

Γ – гамма функция Эйлера.

По значениям $\mathrm{tg}\, x$ можно вычислить $\sin x$, $\cos x$, используя формулы

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

при помощи f_n, где $f_n = \frac{P_n}{Q_n}$ вычисляются с использованием прямого рекуррентного алгоритма

$$P_0 = 0;\ Q_0 = 1;\ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1};$$

$$\begin{cases} P_n = (2n-1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2} \\ Q_n = (2n-1)Q_{n-1} - x^2 Q_{n-2} \end{cases} \text{при } n \ge 2.$$

Ниже приводится листинг программы, разработанной на языке Turbo Pascal для нахождения значений функций $\sin x$ и $\cos x$, используя связь $\sin x$ и $\cos x$ с $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, с использованием подходящих дробей цепных дробей 7-го порядка для $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 1{,}5$ и указано приближенное значение этих функций с точностью до шестнадцатого знака.

Листинг программы

```
uses crt;
var
   n, i, j:integer;
   d1, d2, sinx, cosx, x, s, g: real;
begin
     clrscr;
     writeln('________________________________________________________');
     writeln('  x   |    sin x    |    cos x    | погр. sin x  | погр. cos x  ');
     for j:=1 to 15 do
     begin
           x:=j*0.1;
           x:=x/2;
          writeln('________________________________________________________');
          write('  ',(j*0.1):2:1,'   |   ');
          for n:=5 to 7 do
          begin
                i:=n;
                g:=0;
                s:=x*x/(2*n-1);
                   i:=i-1;
                   while i>0 do
                   begin
                            g:=x*x/(2*i-1-s);
                            s:=g;
                            i:=i-1;
               end;
               g:=g/x;
          end;
         sinx:=2*g/(1+sqr(g));
           cosx:=(1-sqr(g))/(1+sqr(g));
           d1:=abs(sinx-sin(x*2));
           d2:=abs(cosx-cos(x*2));
           write(sinx:14,'   |   ');
```

```
            write(cosx:14,'  |  ');
            write(d1:9,'  |  ');
            write(d2:9);
            writeln;
        end;
readkey;
end.
```

Результаты программы

x	sin x	cos x	погр. sin x	погр. cos x
0.1	9.983342E-002	9.950042E-001	2.8E-017	0.0E+000
0.2	1.986693E-001	9.800666E-001	5.6E-017	1.1E-016
0.3	2.955202E-001	9.553365E-001	5.6E-017	1.1E-016
0.4	3.894183E-001	9.210610E-001	0.0E+000	1.1E-016
0.5	4.794255E-001	8.775826E-001	5.6E-017	1.1E-016
0.6	5.646425E-001	8.253356E-001	1.1E-016	1.1E-016
0.7	6.442177E-001	7.648422E-001	1.1E-016	0.0E+000
0.8	7.173561E-001	6.967067E-001	0.0E+000	1.1E-016
0.9	7.833269E-001	6.216100E-001	0.0E+000	1.1E-016
1.0	8.414710E-001	5.403023E-001	0.0E+000	0.0E+000
1.1	8.912074E-001	4.535961E-001	0.0E+000	0.0E+000
1.2	9.320391E-001	3.623578E-001	0.0E+000	1.7E-016
1.3	9.635582E-001	2.674988E-001	0.0E+000	0.0E+000
1.4	9.854497E-001	1.699671E-001	1.1E-016	1.7E-016
1.5	9.974950E-001	7.073720E-002	0.0E+000	3.6E-016

Из полученных значений для погрешностей видно, что данный способ интерполирования является более точным.

Список литературы

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

2. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби, Аналитическая теория и положения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

3. Немнюгин С.А., Перколаб Л.В.. Изучаем Turbo Pascal. – СПб.: Питер, 2003. – 320 с.

4. Рагимханова Г.С. Скорость сходимости некоторых цепных дробей и их приложения: дис. … канд. физ.-мат. наук. – СПб., 2003. – 78 с.

5. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

6. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: ГИИТТЛ, 1956. – 203 с.

7. Янке Е., Эндс Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

8. Яралиева Б.С. Использование цепных дробей для решений дифференциальных уравнений и оценки адекватности математических моделей динамических систем: дис. … канд. техн. наук. – Махачкала, 2013. – С. 4.

9. Perron O., Die Lehze von den Kettenbruchen, Vol.1 (1954) Vol 2 (1957), Teubner, Leipzig.

References

1. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, series and proizvedeniy. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p.

2. Jones W., Tron W. Continued fractions, analytic theory and polozheniya. Moscow: Mir, 1985. 414 p.

3. Nemnyugin S.A., Perkolab L.V.. Operating Turbo Pascal. SPb .: Peter, 2003. 320 p.

4. Ragimkhanova G.S. The rate of convergence of some continued fractions and their applications: dis ... kand.fiz.-mat. nauk. St. Petersburg. 2003. 78 p.

5. Khinchin A.Y. Chain drobi. Moscow: Nauka, 1978. 112 p.

6. Khovanskii A.N. The application of continued fractions and their generalizations to problems of the approximation analiza. Moscow: GIITTL, 1956. 203 p.

7. Jahnke E., Ends F., Lesh F. Special funktsii. Moscow: Nauka, 1968. 344 p.

8. Yaralieva B.S. Using continued fractions for solutions of differential equations and evaluate the adequacy of mathematical models of dynamic systems: dis ... kand.tehn.nauk. Mahachkala. 2013. p. 4.

9. Perron O., Die Lehze von den Kettenbruchen, Vol.1 (1954) Vol. 2 (1957), Teubner, Leipzig.

Рецензенты:

Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала;

Баламирзоев А.Г., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», г. Махачкала.

Работа поступила в редакцию 28.11.2014.