УДК 517

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Илюхин А.А.

ФГБОУ ВПО «Таганрогский институт имени А.П. Чехова» (филиал), РГЭУ(РИНХ), Таганрог, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru

Основная цель работы – дать исследователю, использующему уравнения в частных производных эллиптического типа, возможность достаточно простого и надежного способа приведения уравнения к виду, где в его главной части присутствует оператор Лапласа. В отличие от известных ранее методов нормализации уравнений математической физики предложен алгоритм приведения уравнения эллиптического типа к каноническому виду, который не требует перехода в комплексную плоскость. Для реализации этого алгоритма необходимо решить обыкновенные дифференциальные уравнения, которые проще характеристических уравнений в гиперболическом случае. Решение поставленной задачи сводится к алгоритму построения решения системы обыкновенных уравнений достаточно простого вида и осуществляется в исходной области в плоскости действительных переменных.

Ключевые слова: уравнения математической физики, эллиптический тип, канонический вид

NEW ALGORITHM OF REDUCTION OF THE TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF ELLIPTIC TYPE TO A CANONICAL FORM

Ilyukhin A.A.

FGBOU VPO «The Taganrog institute of a name of A.P. Chekhov», Taganrog, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru

The main objective of the work to give researchers using partial differential equations of elliptic type, the ability to fairly simple and reliable way to bring the equation to the form, where it is present the main part of the Laplace operator. Unlike the known the algorithm of reduction of the equation of elliptic type to a canonical form which doesn't demand transition to complex area is earlier offered. For realization of this algorithm it is necessary to solve the ordinary differential equation which is simpler than the characteristic equations in a hyperbolic case. The solution of the problem is reduced to an algorithm for constructing solutions of the system of ordinary differential equations of the form rather simple and is carried out in the source area in the plane of the real variables.

Keywords: equations of mathematical physics, elliptic type, canonical form

Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + 2a_{13}u_x + 2a_{23}u_y + a_{33}u = f, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} и f являются функциями переменных x и y, причем точка (x, y) принадлежит общей области G определения всех функций, входящих в уравнение (1), в том числе и неизвестной функции $u(x, y)$. Граничные условия не участвуют при решении поставленной ниже задачи, поэтому тип граничной задачи оговорен не будет.

Сформулируем задачу данной работы:

указать последовательность невырожденных преобразований независимых переменных, в результате реализации которой главная часть уравнения (1) примет вид суммы вторых производных с равными коэффициентами, а коэффициент при смешанной производной будет равен нулю.

Изначально предполагаем, что уравнение (1) в G есть уравнение эллиптического типа, т.е.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_2 > 0. \qquad (2)$$

В некоторых учебных пособиях (см. [1]) при преобразовании уравнения эллиптического типа вначале идут по тому же пути, что и в случае гиперболического уравнения (приводят главную часть к виду, содержащему только смешанную производную), а затем преобразованием, в котором выделяются действительная и мнимая части у последних переменных, уравнение эллиптического типа записывается в требуемом виде. Однако подобный эксперимент не применим при решении научных задач [2, 6].

Однако такое преобразование содержит ошибочное утверждение о комплексной сопряженности переменных, которые определяются из общих интегралов для комплексных характеристических уравнений. Ошибочность утверждения состоит в том, что характеристические уравнения в комплексной области не являются комплексно-сопряженными, и поэтому соответствующие им общие интегралы также таковыми не являются.

Первый этап преобразования. В связи с тем, что сокращение числа членов в главной части уравнения эллиптического типа может быть сделано единственным образом, а именно только избавлением слагаемого со смешанной производной, зададимся целью достичь этого за счет выбора соответствующего преобразования. Пусть задано преобразование вида

$$\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y). \qquad (3)$$

В результате этого преобразования коэффициент A_{12} перед смешанной производной $u_{\xi\eta}$ примет вид

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y. \qquad (4)$$

Запишем равенство (4) в следующем виде, приравняв нулю коэффициент A_{12},

$$\begin{aligned}&(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)\xi_x + (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\xi_y = \\ &= (a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y)\eta_x + (a_{12}\xi_x + a_{22}\xi_y)\eta_y = 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Так как для отыскания замены переменных (3) возникает только одно уравнение (5), то имеющийся произвол можно устранить, рассмотрев один из четырех вариантов:

$$1)\begin{cases} a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0, \\ \xi_y = 0, \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y = 0, \\ \xi_x = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

$$3)\begin{cases} a_{12}\xi_x + a_{22}\xi_y = 0, \\ \eta_x = 0, \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y = 0, \\ \eta_y = 0. \end{cases}$$

Возможны ещё два варианта приравнивания к нулю сомножителей в равенстве (5), но один из них $\xi_x = \xi_y = 0$ или $\eta_x = \eta_y = 0$ приводит к тому, что либо $\xi = \text{const}$, либо $\eta = \text{const}$. Этого не может быть, так как ξ и η в новых переменных являются аргументами функции $u(\xi, \eta)$, область определения которой выродилась бы в одномерную область $\xi = \text{const}$ или $\eta = \text{const}$, что может быть только при вырожденном отображении области D. Второй вариант, когда

$$1)\begin{cases} a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0 \\ a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y = 0 \end{cases}$$

или

$$2)\begin{cases} a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y = 0 \\ a_{12}\xi_x + a_{22}\xi_y = 0 \end{cases}$$

в силу неравенства нулю определителя этой системы

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

приведет к $\eta_x = \eta_y = 0$, либо $\xi_x = \xi_y = 0$. Тем самым возникает ситуация из предыдущего варианта.

В каждом из этих вариантов одна из «новых» переменных связана только с одной из «старых» переменных. Следует отметить, что варианты 1 и 4 по существу совпадают. Точно также совпадают варианты 2 и 3. Отличие состоит только в обмене ролями между переменными ξ и η, или, что то же самое, в замене обозначений для новых переменных.

Изучению подлежит лишь случай, когда все три коэффициента a_{11}, a_{12} и a_{22}, не обращаются в нуль. Поэтому можно остановиться на первом случае

$$\begin{cases} a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0, \\ \xi_y = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Из второго уравнения следует, что $\xi = \xi(x)$.

В связи с уравнением

$$a_{11}\,\eta_x + a_{12}\,\eta_y = 0 \qquad (8)$$

справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы функция $\eta = \eta(x,\ y)$ была решением уравнения (8) в области *D, необходимо* и достаточно, чтобы соотношение

$$\eta(x, y) = C \qquad (9)$$

в области D определяло общий интеграл уравнения

$$a_{11}(x,\ y)dy - a_{12}(x, y)dx = 0.$$

Таким образом, функция $\eta(x, y)$, стоящая в правой части интеграла (9), является решением уравнения в частных производных (5), а замена переменных $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x, y)$ обращает в нуль в преобразованном уравнении (4) коэффициент $A_{12} = 0$. Если выбрать произвольную функцию $\xi(x)$ такой, что $\xi_x \neq 0$ ни в одной точке области D, то для невырожденности предлагаемого преобразования переменных из якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \xi_x & 0 \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

следует, что $\eta_y \neq 0$. Это условие естественно, т.к. ξ зависит только от x, то вторая переменная η обязана зависеть от y.

В предлагаемой замене переменных имеется определённый произвол: $\xi(x)$ – произвольная функция, и хотя $\eta(x,\ y) = C$ – интеграл уравнения (8), но достаточно гладкая функция $f(\eta(x,\ y)) = C$ также является интегралом. Поэтому поставим задачу:

одновременно с равенством $A_{12} = 0$ подобрать $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x, y)$ так, чтобы выполнялось ещё одно равенство

$$A_{11} = A_{22}, \qquad (10)$$

которое обеспечит следующий вид главной части:

$$A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + F\left(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta\right) = 0. \quad (11)$$

Предварительно преобразуем равенство (10) с учётом того, что равенство $A_{12} = 0$ получено при условиях (7):

$$A_{11} = a_{11}(\xi_x)^2;\; A_{22} = a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{11}(\eta_y)^2 = (a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)\eta_x + (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\eta_y.$$

Так как в силу уравнения (8) первая скобка равна нулю, то

$$A_{22} = (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\eta_y.$$

Тогда равенство (10) можно записать в следующем виде:

$$a_{11}\left(\xi_x\right)^2 = a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\left(\eta_x\right)^2.$$

С учетом невырожденности проводимого преобразования можно поделить это равенство на $(\eta_y)^2 \neq 0$ и в результате получить

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\eta_y}\right)^2 = a_{12}\frac{\eta_x}{\eta_y} + a_{22}.$$

Найдём отношение η_x/η_y из соотношения (8) и его подставим в последнее равенство

$$\left(\frac{\xi_x}{\eta_y}\right)^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} > 0.$$

Таким образом, равенство возможно. Для того чтобы из него можно было определить ξ_x, необходимо и достаточно, чтобы в равенстве

$$\left(\xi_x\right)^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2}\left(\eta_y\right)^2, \qquad (12)$$

и его правая часть зависела только от x. Выполнение этого условия позволит определить функцию $\xi = \xi(x)$ вместе с функцией $\eta = \eta(x, y)$, найденной из уравнения $a_{12}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0$. Эти две функции зададут преобразование, с помощью которого уравнение (1) будет иметь вид (11), называемый каноническим для уравнения эллиптического типа. Если же с помощью равенства (11) в силу того, что его правая часть не будет удовлетворять необходимому условию и потому нельзя будет определить ξ_x, то для приведения уравнения эллиптического типа к каноническому виду можно использовать вторую возможность, решив систему

$$\begin{cases} a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y = 0, \\ \xi_x = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Тогда необходимым и достаточным условием приведения к каноническому виду уравнения (1) будет условие

$$\left(\xi_y\right)^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}^2}\left(\eta_x\right)^2, \qquad (14)$$

где правая часть должна зависеть только от y. Проверка условий (12) или (14) возможна только после решения соответственно уравнений $a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0$ или $a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y = 0$, вместо которых согласно теореме можно использовать общий интеграл одного из характеристических уравнений,

$$a_{11}dy - a_{12}dx = 0$$

или

$$a_{12}dy - a_{22}dx = 0 \qquad (15)$$

Вывод

При интегрировании уравнений (12) или (14) требование зависимости только от одной переменной не является обязательным, т.к. из интегралов соответствующих характеристических уравнений можно выразить одну из переменных через другую и затем из правых частей уравнений (12) или (14) ненужную переменную исключить. В результате получим зависимость только от одной переменной, по которой слева в уравнении (12) или (14) осуществляется дифференцирование.

Замечание. Результаты работы докладывались на конференциях [4, 5, 7] и получили одобрение их участников.

Список литературы

1. Бородицкий М.П. и др. Сборник заданий к типовым расчетам и контрольным работам по математическим дисциплинам. Ч. 2: учеб. пособие – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.

3. Илюхин А.А. Уравнения математической физики. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2010.

4. Илюхин А.А.Построение характеристик для уравнения эллиптического типа. Сборник докладов Седьмой научно-практической конференции. – Таганрог: Изд-во ТИУиЭ, 2007.

5. Илюхин А.А. Метод характеристик для уравнения эллиптического типа // Компьютерные науки и информационные технологии: труды Международной конференции. – Саратов, 2007.

6. Илюхин А.А., Попов А.К. Полуобратная задача о деформации цилиндрического тела под действием концевых усилий в рамках моментной теории упругости // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6.

7. Илюхин А.А. Приведение двумерного уравнения эллиптического типа к каноническому типу // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты: труды Третьей Международной научно-практической интернет – конференции. – Донецк (Украина), май 2014.

References

1. Boroditskii M.P. and others. The collection of tasks for standard calculations and tests in mathematics. Part 2: studies. Guide – Rostov n / D: Izd SFU 2009.

2. Vekua I.N. Generalized analytic functions. M.: Fizmatgiz, 1959.

3. Ilyukhin A.A. Equations of mathematical physics. Taganrog Univ TGPI 2010.

4. Ilyukhin A.A. Postroenie characteristics for elliptic equations. Collected papers of the Seventh Scientific and Practical Conference, Publ TIUiE, Taganrog, 2007.

5. Ilyukhin A.A. The method of characteristics for elliptic equations. Proceedings of the Inter-International Conference «Computer Science and Information technolo-gies», Saratov, 2007.

6. Ilyukhin A.A., Popov AK Semi-inverse problem of the deformation of the cylindrical body under the action of the end of efforts within the moment theory of elasticity. Funda-mental studies, no. 6, 2013.

7. Ilyukhin A.A. Bringing a two-dimensional elliptic equation for the canonical-sky type. Modern trends in the development of mathematics and its applications, Proceedings of the Third International Scientific – Practical Internet – Conference Pre-netsuke (Ukraine), May 2014.

Рецензенты:

Тедеев А.Ф., д.ф.-м.н., заведующий отделом уравнений математической физики, ИПММ НАН Украины, г. Донецк;

Сухинов А.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой МОСК, ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет», г. Таганрог.

Работа поступила в редакцию 28.11.2014.