

УДК 531.395

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШАРНИРНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Смирнов Д.А.

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»,
Нижегород, e-mail: dmsmir@yandex.ru

Разработана математическая модель динамики движения незамкнутой кинематической цепи трех шарнирно-соединенных стержней, обладающая тремя степенями свободы. В качестве основы для разработки математической модели служат уравнения Лагранжа второго рода. Полученная математическая модель использована для решения частной задачи при заданных начальных условиях. Решение системы дифференциальных уравнений осуществлено численным методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Определен закон движения системы в обобщенных координатах, представлены графики зависимостей углов поворота и угловых скоростей от времени. На основе анализа результатов расчета сделан вывод о наличии двух этапов в движении системы. На этапе установившегося движения стержни образуют практически прямую линию. При этом относительное движение второго и третьего стержней носит характер затухающих колебаний. Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей динамики движения незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы.

Ключевые слова: динамика механических систем, относительное движение, уравнения Лагранжа второго рода

STUDY ON KINETICS OF THREE-DEGREE-OF-FREEDOM HINGED ARMS MATERIAL SYSTEM

Smirnov D.A.

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod,
e-mail: dmsmir@yandex.ru

A mathematical model for kinetics of three-degree-of-freedom hinged arms material system is set up. Lagrange's equations of the second kind are taken as the basis for the mathematical model. The resulted mathematical model is used to solve a specific problem under given initial conditions. The simultaneous equations are solved by using Runge-Kutta method of the forth kind. The motion law for the system in generalized coordinates is defined. Diagrams for the arms rotary angle and rate versus time relationships are presented. The analysis of the calculation data shows the presence of two stages of the system motion. The arms form a practically direct line at the stable motion stage. Here the relative motion of the second and third arms is characterized by convergent oscillations. The results of the present research can be used to develop mathematical models for kinetics of open kinematic chains with finite number of degrees of freedom.

Keywords: kinetics of material systems, relative motion, Lagrange's equations of the second kind

Изучение динамики незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей для различных областей науки и техники, например исследования динамики механических манипуляторов [5].

Целью данной работы является развитие методов исследования динамики незамкнутых кинематических цепей, а также разработка математической модели динамики механической системы шарнирно-соединенных стержней (рис. 1) с тремя степенями свободы. В работе решается частная задача по определению закона движения системы в обобщенных координатах.

Рассматривается механическая система, состоящая из трех абсолютно твердых стержней, длины которых обозначим l_1, l_2, l_3 . Стержни соединены между собой шарнирами O_1 и O_2 . Стержень 1 закреплен при помощи неподвижного цилиндрического шарнира O . На стержень 1 действует момент активных сил M .

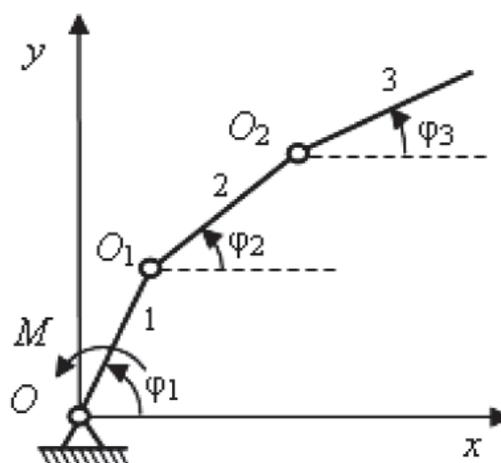


Рис. 1. Кинематическая схема:
1, 2, 3 – абсолютно твердые стержни;
 O, O_1, O_2 – идеальные шарниры;
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы поворота стержней;
 M – момент активных сил

Задача решается при следующих предположениях:

- все шарниры являются идеальными (силы трения и их моменты отсутствуют);
- движение происходит в горизонтальной плоскости (силы тяжести не совершают работы);
- момент активных сил является постоянным $M = \text{const}$.

Для решения задачи об определении закона движения механической системы используется метод уравнений Лагранжа II рода [2, 4]. Система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выбраны углы поворота стержней φ_1 , φ_2 и φ_3 . Таким образом, уравнения Лагранжа II рода можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2, \quad (4)$$

где m_1 и m_2 – массы стержней 1 и 2 соответственно.

Кинетическую энергию стержня 3 определим по формуле [2]

$$T_3 = \sum \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2}, \quad (5)$$

где m_k – масса k -й точки стержня 3; \bar{V}_k – вектор скорости k -й точки стержня 3.

$$T_3 = \sum \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} = \sum \frac{m_k}{2} (\bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{O_2 O_1} + \bar{V}_{k O_2})^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum m_k (V_{O_1}^2 + V_{O_2 O_1}^2 + V_{k O_2}^2 + 2V_{O_1} V_{O_2 O_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2V_{O_1} V_{k O_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2V_{O_2 O_1} V_{k O_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_3));$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – угол между векторами скоростей \bar{V}_{O_1} и $\bar{V}_{O_2 O_1}$; $\varphi_1 - \varphi_3$ – угол между векторами скоростей \bar{V}_{O_1} и $\bar{V}_{k O_2}$; $\varphi_2 - \varphi_3$ – угол между векторами скоростей $\bar{V}_{O_2 O_1}$ и $\bar{V}_{k O_2}$.

Запишем выражения для скоростей V_{O_1} , $V_{k O_1}$ и $V_{k O_2}$:

$$V_{O_1} = \dot{\varphi}_1 l_1; \quad V_{O_2 O_1} = \dot{\varphi}_2 l_2; \quad V_{k O_2} = \dot{\varphi}_3 r_k,$$

где r_k – радиус вектор k -й точки стержня 3 в относительном вращении вокруг полюса O_2 .

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 + m_3 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3. \quad (7)$$

где φ_i – обобщенные координаты системы; $\dot{\varphi}_i$ – обобщенные скорости; Q_i – обобщенные силы; T – кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий трех стержней по формуле

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (2)$$

где T_1 – кинетическая энергия стержня 1; T_2 – кинетическая энергия стержня 2; T_3 – кинетическая энергия стержня 3.

В работе [6] получены выражения для кинетических энергий стержня 1 и стержня 2:

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2; \quad (3)$$

Скорость \bar{V}_k определяется теоремой сложения скоростей

$$\bar{V}_k = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{O_2 O_1} + \bar{V}_{k O_2}, \quad (6)$$

где \bar{V}_{O_1} – вектор скорости шарнира O_1 , $\bar{V}_{O_2 O_1}$ – вектор относительной скорости шарнира O_2 ; $\bar{V}_{k O_2}$ – вектор относительной скорости k -й точки стержня 3.

Подставляя (6) в выражение (5), получим

Подставляя эти выражения в формулу для кинетической энергии стержня 3, раскрывая суммы и учитывая что $\sum m_k = m_3$ – масса стержня 3, $\sum m_k r_k = \frac{1}{2} m_3 l_3$ – статический момент стержня 3 относительно точки O_2 , $\sum m_k r_k^2 = \frac{1}{3} m_3 l_3^2$ – момент инерции стержня 3 относительно точки O_2 , окончательно для кинетической энергии стержня 3 получим выражение

Подставляя (3), (4) и (7) в выражение (2) для кинетической энергии системы, получим

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = a_1 \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \dot{\varphi}_2^2 + a_3 \dot{\varphi}_3^2 + a_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + a_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + a_6 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3, \quad (9)$$

где коэффициенты a_i , характеризующие инерционные свойства системы, определяются выражениями

$$a_1 = \left(\frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2;$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_2^2; \quad a_3 = \frac{1}{6} m_2 l_3^2;$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_1 l_2; \quad a_5 = \frac{1}{2} m_3 l_1 l_2;$$

$$a_6 = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3.$$

Правые части уравнений Лагранжа представляют собой обобщенные силы [2], определяемые выражением

$$Q_i = \sum \delta A_j / \delta \varphi_i.$$

где $\sum \delta A_j$ – сумма работ активных сил, действующих на систему на ее возможном перемещении.

Учитывая, что на систему действует только момент активных сил M , получим

$$Q_1 = M; \quad Q_2 = 0; \quad Q_3 = 0. \quad (10)$$

После определения производных от кинетической энергии системы (9), образующих левые части уравнений Лагранжа, получим дифференциальные уравнения второго порядка:

$$2a_1 \ddot{\varphi}_1 + a_4 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_5 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + a_4 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a_5 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = M; \quad (11)$$

$$a_4 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2a_2 \ddot{\varphi}_2 + a_6 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - a_4 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a_6 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \quad (12)$$

$$a_5 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + a_6 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + 2a_3 \ddot{\varphi}_3 - a_5 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - a_6 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (11), (12) и (13) представляет собой математическую модель динамики исследуемой механической системы с тремя степенями свободы.

Представим систему нелинейных дифференциальных уравнений (11), (12) и (13) в виде удобных для практического решения задач:

$$A_{11} \ddot{\varphi}_1 + A_{12} \ddot{\varphi}_2 + A_{13} \ddot{\varphi}_3 = B_1; \quad (14)$$

$$A_{21} \ddot{\varphi}_1 + A_{22} \ddot{\varphi}_2 + A_{23} \ddot{\varphi}_3 = B_2; \quad (15)$$

$$B_1 = M - a_4 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a_5 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3);$$

$$B_2 = a_4 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a_6 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3);$$

$$B_3 = a_5 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + a_6 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Решение системы уравнений (14), (15) и (16) может быть осуществлено различными численными методами [1, 3].

Рассмотрим результаты решения, полученные при реализации метода Рунге – Кутты четвертого порядка. На рис. 2 представлены зависимости углов поворота стержней φ_1 , φ_2 и φ_3 от времени, а на рис. 3 показаны зависимости угловых скоростей $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ и $\omega_3 = \dot{\varphi}_3$ от времени. Представлен-

$$A_{31} \ddot{\varphi}_1 + A_{32} \ddot{\varphi}_2 + A_{33} \ddot{\varphi}_3 = B_3, \quad (16)$$

где A_{ij} и B_k определяются выражениями

$$A_{11} = 2a_1; \quad A_{22} = 2a_2; \quad A_{33} = 2a_3;$$

$$A_{12} = A_{21} = a_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$A_{13} = A_{31} = a_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3);$$

$$A_{23} = A_{32} = a_6 \cos(\varphi_2 - \varphi_3);$$

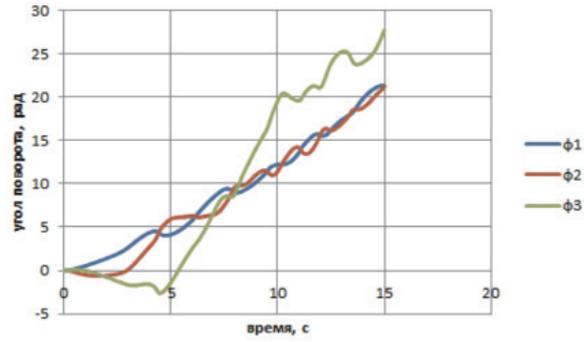
ные зависимости получены при следующих исходных данных и начальных условиях:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ кг}; \quad l_1 = l_2 = l_3 = 1 \text{ м};$$

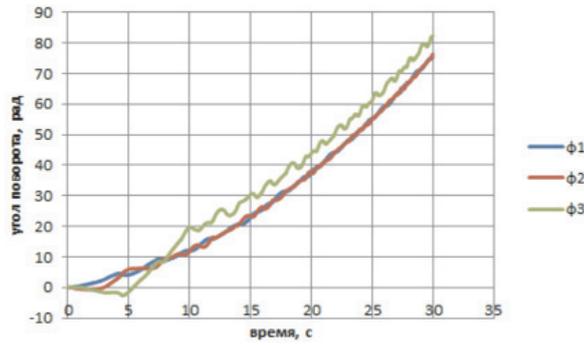
$$M = 1 \text{ Нм}; \quad t = 0;$$

$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_2|_{t=0} = \varphi_3|_{t=0} = 0;$$

$$\dot{\varphi}_1|_{t=0} = \dot{\varphi}_2|_{t=0} = \dot{\varphi}_3|_{t=0} = 0.$$

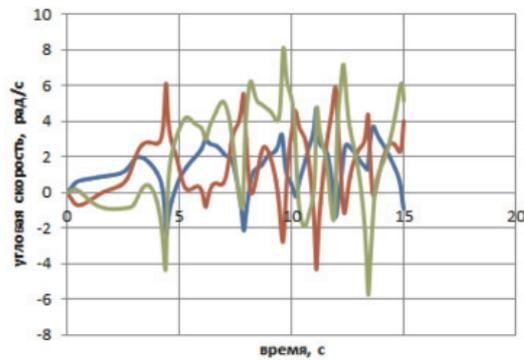


а

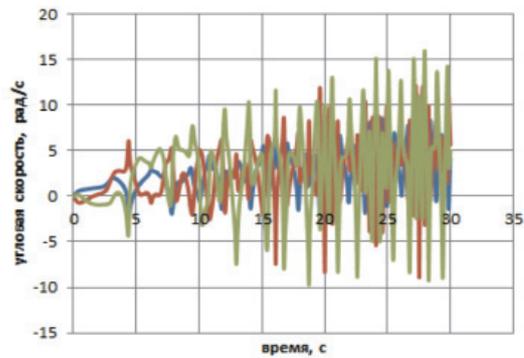


б

Рис. 2. Зависимость углов поворота стержней от времени:
 а – зависимость углов поворота стержней от времени на этапе неустановившегося движения;
 б – зависимость углов поворота стержней от времени на этапе установившегося движения



а



б

Рис. 3. Зависимость угловых скоростей от времени:
 а – зависимость угловых скоростей от времени на этапе неустановившегося движения;
 б – зависимость угловых скоростей от времени на этапе установившегося движения

Анализ результатов решения показывает, что движение системы можно разделить на этапы неустановившегося и установившегося движений. На этапе неустановившегося движения стержни 2 и 3 поворачиваются в направлении, противоположном вращению стержня 1 (рис. 2, а и 3, а), после чего меняют направление вращения. Через небольшой промежуток времени (при $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \varphi_3 \approx 2\pi$) можно говорить о начале установившегося движения. Все стержни вращаются в одном направлении, образуя практически прямую линию (рис. 2, б, 3, б). Стержень 3 опережает стержни 1 и 2 на один оборот $\varphi_1 \approx \varphi_2, \varphi_3 \approx \varphi_1 + 2\pi$.

Заключение

Анализ графиков углов поворота и угловых скоростей на этапе установившегося движения системы показывает, что движение стержней 1, 2 и 3 обладает признаками периодичности. Движение стержней можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного и относительного движений. За переносное движение можно принять равноускоренное вращение стержней вокруг неподвижного центра O с равными угловыми скоростями и угловыми ускорениями. В этом случае относительные движения стержней будут представлять собой затухающие колебания с возрастающими частотами.

Результаты решения, полученные при других исходных данных и начальных условиях, позволяют сделать следующие выводы:

- длительность неустановившегося движения зависит от момента активных сил M , при увеличении момента активных сил время неустановившегося движения уменьшается;
- минимальное значение углов поворота второго и третьего стержней не зависит от величины момента активных сил, а зависит только от начальных условий.

Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей динамики незамкнутых кинематических цепей.

Список литературы

1. Бахвалов С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
4. Панов Ю.Л., Панов А.Ю. Относительное движение в механике. Инженерные задачи. – Нижний Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2008. – 144 с.
5. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. Смирнов Д.А., Тежикова Н.П. Исследование динамики механической системы шарнирных стержней с двумя степенями свободы // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10 (15). – С. 3389–3393.

References

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical Methods. Moscow, BINOM. Laboratoriya Znaniy, 2006. 636 p.
2. Lure A.I. Analytical Mechanics. Moscow, GIFML, 1961. 824 p.
3. Marchuk G.I. Methods of Computing Mathematics. Moscow, Nauka, 1989. 608 p.
4. Panov Yu.L., Panov A.Yu. Relative Motion in Mechanics. Engineering Tasks. NGTU n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, 2008. 144 p.
5. Popov E.P., Vereschagin A.F., Zenkevich S.L. Manipulator Robots: Dynamics and Algorithms. Moscow, Nauka, 1978. 400 p.
6. Smirnov D.A., Tezhikova N.P. Study on kinetics of two-degree-of-freedom hinged arms material system. The fundamental researches. 2013. no. 10(15). 3389–3393 p.

Рецензенты:

Панов А.Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет», г. Нижний Новгород;

Кретинин О.В., д.т.н., профессор кафедры «Автоматизация машиностроения», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет», г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 28.11.2014.