

УДК 626.01

ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ СОЛЕЙ В ТРЕЩИНЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

¹Баламирзоев А.Г., ²Агаханов С.А., ²Азизова Л.Н., ²Гаджиагаев Ш.С.

¹Махачкалинский филиал ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», Махачкала, e-mail: mfmadi@dagestan.ru;

²ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», Махачкала, e-mail: dgpu@mail.ru

В данной статье рассматривается нестационарная концентрация солей в трещине произвольного сечения; предлагается приближенный метод, основанный на совместном применении интегральных преобразований и вариационных методов к задачам с переменными коэффициентами. Рассмотрены задачи нестационарной концентрации цилиндрических тел с прямоугольным, треугольным и параболическим сечениями при постоянных коэффициентах. Предложенный метод дает возможность решить задачи нестационарного поля концентраций для цилиндрических тел с другими «неклассическими» профилями перпендикулярного сечения. Для оценки интенсивности раскрытия трещины при растворении ее стенок рассмотрены средние по длине трещины приращения раскрытия и получены соответствующие выражения. Приведенные приемы позволяют приближенно учесть изменение размеров трещины в процессе растворения. Полученные формулы позволяют построить поверхности изоконцентрации внутри тела (прямоугольный, квадратный, трехгранного тела и цилиндрического тела с параболическим сечением) для любого момента времени.

Ключевые слова: нестационарная концентрация, трещина, вариационный метод, переменный коэффициент, поле концентраций

THE PROBLEM OF NONSTATIONARY CONCENTRATION OF SALTS IN THE CRACK ARBITRARY CROSS-SECTION

¹Balamirzoev A.G., ²Agakhanov S.A., ²Azizova L.N., ²Gadzhiaev S.S.

¹Makhachkala branch of the Moscow state automobile and road technical University (MADI), Makhachkala, e-mail: mfmadi@dagestan.ru;

²Dagestan state pedagogical university, Makhachkala, e-mail: dgpu@mail.ru

This article discusses the non-stationary concentration of salts in the crack of arbitrary cross-section; proposed approximate method, based on the joint application of integral transformations and variational methods for problems with variable coefficients. We consider the problem of non-stationary concentrations of cylindrical bodies with rectangular, triangular and parabolic cross-sections with constant coefficients. The proposed method allows to solve problems of non-stationary fields of concentration for cylindrical bodies with other «non-classical» profiles perpendicular cross-section. To assess the intensity of the crack opening at the dissolution its walls are considered secondary crack length increment disclosure and corresponding expressions. The above techniques allows one to approximately take into account the changing size of the cracks in the process of dissolution. On the obtained formulas allow to build surface isoconcentration inside the body (rectangular, square, triangular body and a cylindrical body with a parabolic cross-section) for any point in time.

Keywords: unsteady concentration, crack, variational method, variable ratio, field concentrations

Для расчета нестационарной концентрации солей в трещине произвольного сечения автором предлагается приближенный метод, основанный на совместном применении интегральных преобразований и вариационных методов.

Предположим, что ось и образующая трещины перпендикулярны к плоскости x, y , т.е. совпадают с направлением оси z . В сечениях, параллельных плоскости x, y , тело имеет постоянную геометрическую форму области D . Обозначим через Γ гра-

ницу области D , тогда Γ служит направляющей цилиндрического тела. В частности, если границей области D будет окружность, то получаем обычный круговой цилиндр.

Пусть замкнутая кривая Γ аналитически выражается уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

В этом случае задача нестационарной концентрации при переменных коэффициентах записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_1(x, y)}{c\gamma} \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D_2(x, y)}{c\gamma} \frac{\partial C}{\partial y} \right]; \quad (2)$$

$$[C(x, y, t)]_{t=0} = f(x, y); \quad (3) \quad \text{где } x', y' - \text{координаты точки на кривой } \Gamma; \\ \frac{D_1(x, y)}{c\gamma} - \text{коэффициент диффузии вещества,}$$

$$[C(x, y, t)]_{\Gamma} = \varphi(x'', y, t), \quad (4) \quad \text{м}^2/\text{с}. \text{Применим к уравнению (2) и граничным} \\ \text{условиям (4) преобразование Лапласа, тогда}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_1(x, y)}{c\gamma} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D_2(x, y)}{c\gamma} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] - p\bar{C}(x, y, p) - f(x, y) = 0; \quad (5)$$

$$[\bar{C}(x, y, p)]_{\Gamma} = \bar{\varphi}(x'', y, p), \quad (6)$$

где

$$\bar{C}(x, y, p) = \int_0^{\infty} C(x, y, t) \exp(-pt) dt.$$

При этом мы предположили, что за- t и дифференцирования по времени x, y
мена порядка интегрирования по времени оправдана.

Пусть

$$L[\bar{C}(x, y, p)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_1}{c\gamma} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D_2}{c\gamma} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] - p\bar{C}, \quad (7)$$

тогда уравнение (5) принимает вид

$$L[\bar{C}] = f(x, y). \quad (8)$$

Определим функцию $\bar{\Phi}(x, y, p)$, непре-
рывную и дифференцируемую до второго
порядка в области D , которая на границе Γ
удовлетворяет условиям (5). Далее введем
вспомогательную функцию $\bar{U}(x, y, p)$,
определяемую равенством

$$\bar{U}(x, y, p) = \bar{C}(x, y, p) - \bar{\Phi}(x, y, p). \quad (9)$$

Для функции $\bar{U}(x, y, p)$ из уравнения
(5) и условия (4) получаем

$$L[\bar{U}(x, y, p)] = -\bar{F}_1(x, y, p); \quad (10)$$

$$[\bar{U}(x, y, p)]_{\Gamma} = 0, \quad (11)$$

где

$$\bar{F}_1(x, y, p) = f(x, y) + L[\bar{\Phi}]. \quad (12)$$

которая, вообще говоря, отлична от нуля
в области D (в противном случае $\bar{U}_n$ будет
точным решением граничной задачи). Для
определения коэффициентов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$

Для определения приближенного значе-
ния функции $\bar{U}(x, y, p)$ граничной задачи
(10), (11) можно применить один из вари-
ационных методов – метод Бубнова – Галер-
кина [4]. Пусть нами выбрана система коор-
динатных функций

$$\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_n(x, y), \quad (13)$$

которая удовлетворяет нулевым граничным
условиям (12), т.е.

$$[\psi_k(x, y)]_{\Gamma} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Приближенное решение граничной за-
дачи (10), (11) будем искать в семействе
функций вида

$$\bar{U}_n(x, y, p) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(p) \psi_k(x, y). \quad (14)$$

Для уравнения (10) составим невязку

$$\text{при } \bar{U} = \bar{U}_n(x, y, p):$$

$$\varepsilon_n[x, y, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n] = L[\bar{U}_n] + \bar{F}_1(x, y, p), \quad (15)$$

при которых невязка ε_n наименее уклоня-
лась бы от нуля, следуя методу Бубнова –
Галеркина, потребуем ортогональность
невязки ко всем координатным функ-
циям (13) [4]:

$$\iint_D \varepsilon_n(x, y, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \psi_m(x, y) dx dy = 0 \quad (16)$$

или

$$\sum (A_{km} + pB_{km}) \bar{a}_k(p) = \bar{c}_m(p), \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{km} = A_{mk} &= \iint_D \left[\frac{D_1}{c\gamma} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + \frac{D_2}{c\gamma} \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right] dx dy \\ B_{km} = B_{mk} &= \iint_D \psi_k \psi_m dx dy, \\ \bar{c}_m(p) &= \iint_D \bar{F}_1(x, y, p) \psi_m dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Можно показать, что система (17) единственным образом определяет коэффициенты $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, когда координатные функции (13) линейно независимы [5].

Пусть эти коэффициенты найдены, тогда в области оригиналов решение (14) запишется в форме

$$U_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \psi_k(x, y), \quad (19)$$

где $a_k(t) = \bar{a}_k(p)$. Приближенное поле концентрации исходной краевой задачи запишется формулой

$$C_n(x, y, t) = \Phi(x, y, t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) \psi_k(x, y). \quad (20)$$

В этом заключается метод совместного применения интегрального преобразования и вариационного исчисления к задачам с переменными коэффициентами.

Остановимся на методе подбора системы координатных функций $\psi_k(x, y)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). В качестве функций $\psi_k(x, y)$ можно брать различные комбинации тригонометрических функций или полиномов. При таком выборе системы координатных функций доказывается полнота системы (13) и сходимость приближенного решения к точному [4].

Пусть нами подобрана функция $\psi_0(x, y) > 0$, непрерывная внутри области D и равная нулю на границе Γ . Тогда в качестве основной системы координатных функций можно принять:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \psi_0(x, y); \\ \psi_2(x, y) &= \psi_0(x, y)x; \\ \psi_3(x, y) &= \psi_0(x, y)y; \dots \end{aligned} \quad (21)$$

таким образом, выбор системы координатных функций сводится по существу к опре-

делению функции $\psi_0(x, y)$. Для улучшения сходимости приближенных решений предлагаем выбор функции $\psi_0(x, y)$ связать с геометрической формой (уравнением) границы области D . Так, например, для прямоугольника $[-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b]$ следует брать

$$\psi_0(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) > 0.$$

Для окружности с центром в начале координат ($x^2 + y^2 = R^2$):

$$\psi_0(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 > 0.$$

Если уравнение кривой Γ имеет вид $F(x, y) = 0$, то

$$\psi_0(x, y) = \pm F(x, y) > 0.$$

Ниже будут рассмотрены задачи нестационарной концентрации цилиндрических тел с прямоугольным, треугольным и параболическим сечениями при постоянных коэффициентах [1–3].

1. Пусть область D является часть плоскости x, y , ограниченная линиями $x = 0, y = 0, x = l, y = b$. Приближенное решение (20) граничной задачи (10), (12) в области оригиналов запишется в данном случае так:

$$C_n(x, y, t) = \varphi(t) [1 - (x^2 - lx)(y^2 - by)] + (l - x)(b - y)xy [a_1(t) + xa_2(t) + \dots]. \quad (22)$$

Определим решение в первом приближении, когда

$$\varphi(x', y', t) = 0$$

и

$$f(x, y) = C_0 = \text{const.}$$

Из системы (17) при $n = 1$ получим

$$(A_{11} + pB_{11})\bar{a}_1(p) = \bar{c}_1,$$

$$A_{11} = \frac{al^3b^3}{90}(l^2 + b^2);$$

$$B_{11} = \frac{l^5b^5}{900};$$

$$c_1 = \frac{C_0l^3b^3}{36}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_1(p) = \frac{25C_0}{l^2 b^2 \left[p + 10a \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right]}.$$

Относительное поле концентрации в первом приближении запишется формулой

$$\theta_1(x, y, t) = \frac{C_1(x, y, t)}{C_0} = 25 \exp \left[-10a \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{b^2} \right) t \right] \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) \frac{x}{l} \frac{y}{b}. \quad (23)$$

Дальнейшие вычисления коэффициентов $\bar{a}_k(p)$ показывают, что решения во втором и третьем приближениях совпадают с первым.

Пусть $l = b = 2c$ (квадратная трещина), тогда

$$\theta_1 = 25 \exp(-5Fo)(X - X^2)(Y - Y^2), \quad (24)$$

где $Fo = \frac{D_1 t}{c^2}$ – критерий Фурье; $X = \frac{x}{l}$;

$Y = \frac{y}{b}$. Из формул (23), (24) легко построить поверхности изоконцентрации внутри тела (прямоугольный, рис. 1, а и квадратный, рис. 1, б) для любого момента времени.

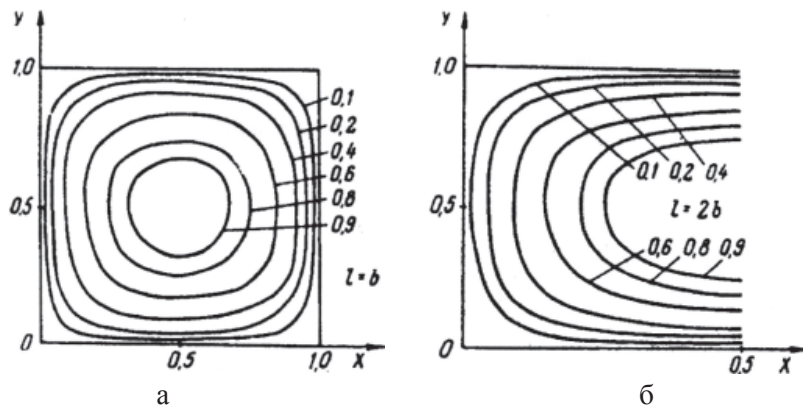


Рис. 1. Поверхности изоконцентрации при $\theta = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ и $Fo = 0,08$

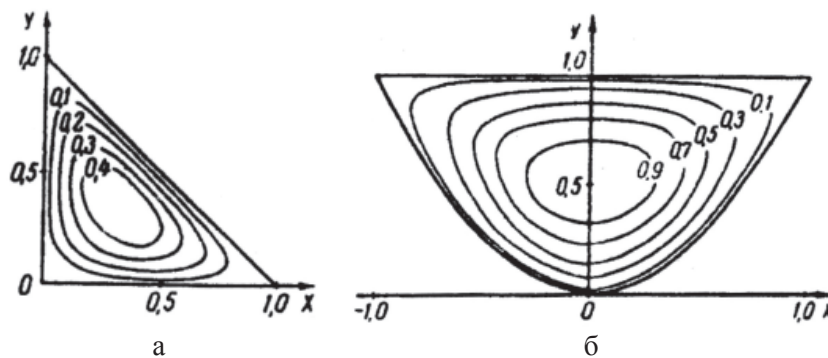


Рис. 2. Поверхности изоконцентрации внутри трехгранного тела и цилиндрического тела с параболическим сечением при $Fo = 0,08$, рассчитанные по формулам (26), (29)

2. Пусть областью D (рис. 2, а) является треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = l$.

Решение исходной задачи для случая $\varphi(x', y', t) = 0$ и $f(x, y) = C_0 = \text{const}$ в первом приближении принимает вид

$$\theta_1(x, y, t) = \frac{C_1(x, y, t)}{C_0} = 42 \exp(-10t)(1 - XY)XY, \quad (25)$$

где

$$X = \frac{x}{l}; \quad Y = \frac{y}{l}.$$

Полагая $l = 2c$, получаем

$$\theta_1(X, Y, Fo) = 42 \exp(-14Fo)(1 - X - Y)XY, \quad (26)$$

где

$$Fo = \frac{D_1 t}{c^2}; 0 \leq \theta_1 \leq 1.$$

Сравнивая формулы (26) с формулой (24), можно отметить, что темп растворения трехгранного тела ($\exp(-14Fo)$) значительно выше, чем у квадратного ($\exp(-5Fo)$). Это объясняется тем, что при равной концентрации количество аккумулированного вещества в первом теле в два раза меньше, чем во втором. В то же время поверхности концентрации на 1 пог. м для этих тел соответственно равны $(2l + \sqrt{2}l)4l$, т.е., несмотря на то, что объем первого тела в два раза меньше, чем у второго, их поверхности концентрации почти равны между собой.

3. Цилиндрическое тело с параболическим перпендикулярным сечением. Пусть

область **D** (рис. 2, б) ограничена линиями $y = kx^2$ и $y = h$ ($-b \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq h$). Приближенное решение краевой задачи, когда на границе поддерживается нулевая концентрация, в области изображений ищем в виде

$$\bar{C}(x, y, p) = \bar{a}_1(p)(y - kx^2)(h - y), \quad (27)$$

где

$$\bar{a}_1(p) = \frac{99C_0}{16h^2} \frac{1}{\left[p + \frac{11a}{8} \left(\frac{9}{h^2} + \frac{4}{b^2} \right) \right]}.$$

Поле концентрации внутри цилиндрического тела с параболическим сечением в первом приближении запишется следующей формулой:

$$\bar{C}_1(x, y, t) = \frac{99C_0}{16h^2} \exp \left[-\frac{11a}{8} \left(\frac{9}{h^2} + \frac{4}{b^2} \right) t \right] (y - kx^2)(h - y). \quad (28)$$

Положим $a = 1$, $b = 1$, $h = 2c$, тогда из (28) получим

$$\theta_1 = \frac{C_1}{C_0} = \frac{99}{64c^2} \exp(-4,469Fo)(y - kx^2)(h - y),$$

$$Fo = \frac{D_1 t}{c^2}. \quad (29)$$

Следовательно, предложенный метод дает возможность решить задачи нестационарного поля концентраций для цилиндрических тел с другими «неклассическими» профилями перпендикулярного сечения.

Список литературы

1. Баламирзоев А.Г. Развитие теории и методов прогнозирования суффозионных деформаций при фильтрации в трещиноватых основаниях гидротехнических сооружений: дис. ... д-ра техн. н. – М., 2006. – С. 57–63.
2. Баламирзоев А.Г. Численное решение уравнений растворения и выноса солей при фильтрации в трещиноватых породах // Изв. вузов. Сев.-кав. регион. Техн. науки, спец. выпуск, Математическое моделирование и компьютерные технологии. – 2002.
3. Баламирзоев А.Г., Зербаев А.М., Иванов В.В. // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 4. – С. 50–54.
4. Вентцель Е.С. Теория операционного исчисления. – М.: Наук, 1983. – 203 с.
5. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – Физматгиз, 1962. – 228 с.

References

1. Balamirzoev A.G. Razvitie teorii i metodov prognozirovaniya suffozionnykh deformatsiy pri fil'tratsii v treshchinovatykh osnovaniyakh gidrotekhnicheskikh sooruzheniy: diss.d.t.n. M., 2006. pp. 57–63.
2. Balamirzoev A.G. Chislennoe reshenie uravneniy rastvoreniya i vynosa soley pri fil'tratsii v treshchinovatykh porodakh // Izv.vuzov. Sev.-kav. region. Tekhn.nauki, spets.vypusk, Matematicheskoe modelirovanie i komp'yuternye tekhnologii. 2002.
3. Balamirzoev A.G., Zerbalev A.M., Ivanov V.V. // Vestnik DGTU, 2013. no. 4. pp. 50–54.
4. Venttsel' E.S. Teoriya operatsionnogo ischisleniya. M.: Nauk, 1983. 203 p.
5. Gel'fand I.M., Fomin S.V. Variatsionnoe ischislenie. Fizmatgiz, 1962. 228 p.

Рецензенты:

Агаханов Э.К., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Автомобильные дороги, основания и фундаменты», ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», г. Махачкала;

Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала.

Работа поступила в редакцию 02.12.2014.