

УДК 681.51

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КВАДРОКОПТЕРА ПРИ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Попов Н.И., Емельянова О.В., Яцун С.Ф., Савин А.И.

ФГБОУ ВПО «Юго-Западный государственный университет», Курск, e-mail: teormeh@inbox.ru

В работе рассмотрена математическая модель, описывающая периодические колебания квадрокоптера, в которой учтены взаимосвязанные электрические и механические процессы в электромеханической системе приводов винтов квадрокоптера. С использованием теоремы динамики об изменении момента количества движения описано вращение корпуса квадрокоптера относительно центра масс. Аналитически найдено решение нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движения квадрокоптера. Проведено моделирование управляемого движения аппарата по углу крена в режиме висения с учетом свойств пропорционального регулятора. Исследовано влияние динамических параметров на характер колебаний квадрокоптера при внешних периодических воздействиях и установлено, что величина собственной частоты колебаний коптера зависит от коэффициента усиления пропорционального регулятора, геометрических размеров коптера, величины управляющего напряжения и аэродинамических характеристик винтовых приводов коптера. Установлено, что существует область параметров коэффициента пропорциональности регулятора, обеспечивающих минимальное значение резонансной амплитуды вынужденных колебаний.

Ключевые слова: квадрокоптер, линейный регулятор, резонансные режимы

RESEARCH OF OSCILLATIONS OF QUADROCOPTER UNDER INFLUENCE OF EXTERNAL PERIODIC DISTURBANCE

Popov N.I., Emelyanova O.V., Jatsun S.F., Savin A.I.

Southwest State University, Kursk, e-mail: teormeh@inbox.ru

The mathematical modeling of movement of a quadcopter which describes the interconnected electrical and mechanical processes in electromechanical system of drives of screws of a quadcopter is shown in this paper. The movement of quadcopter body on the center of mass, around an axis is described using the theorem of angular momentum relatively. The analytical solution of the nonlinear differential equations describing movements of quadcopter body is found. Modeling of roll angle controlled movement of the device in a hanging mode considering the proportional regulator is described. Influence of dynamic parameters on oscillations character of quadcopter under external periodic disturbances is investigated. It's also established that the value of proper frequency of oscillations of a quadcopter depends on gain of the proportional regulator, geometrical sizes of a quadcopter, level of operating voltage, and aerodynamic characteristics of screw drives of a quadcopter. It is established that there is an area of parameters of regulator coefficient of proportionality, which are providing the minimum value of amplitude of the forced oscillations.

Keywords: quadcopter, linear regulator, resonance regimes

Последнее время началось бурное развитие нового класса небольших беспилотных квадроскоптерных летательных аппаратов (квадрокоптеров), способных нести полезную нагрузку в виде контролируемых приборов, видеоаппаратуры. В связи с этим расширяется область применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА), увеличивается роль стабилизации их полета. Устойчивость – свойство аппарата восстанавливать без вмешательства оператора кинематические параметры невозмущенного движения и возвращаться к исходному режиму полета после прекращения действия возмущений [1–4, 6]. При отсутствии управления на большинстве режимов полета БЛА являются неустойчивыми, при малейшем внешнем воздействии начинается «неуправляемое снижение», и квадрокоптер падает. Причиной их неустойчивости является отсутствие восстанавливающего момента по отклонению относительно центра масс и малое демпфирование этого движения. Под ре-

жимом висения будем понимать способность квадрокоптера держаться в воздухе на одном месте, т.е. висеть [5]. Этот режим используется при необходимости вести какие-либо наблюдения с воздуха, находясь на одном месте. Кратковременное висение БЛА у земли может производиться перед его вертикальной посадкой или после отрыва от земли.

Неустойчивость БЛА вынуждает систему автоматического управления (САУ) непрерывно вмешиваться в управление, чтобы обеспечить устойчивость на режиме висения [4–7]. Поэтому актуальной задачей является исследование динамических явлений, возникающих при внешних периодических воздействиях, а также выбор стратегии управления и параметров регулятора.

Математическая модель квадрокоптера в режиме висения

Режим висения квадрокоптера будем рассматривать в плоскости zCy (рис. 1). Считаем, что т. С, являющаяся центром

квадрокоптера, остаётся неподвижной в режиме висения. С этой точкой связана система координат S_{xyz} , тогда подвижная систе-

ма координат $S_{x_1 y_1 z_1}$ связана с корпусом, который поворачивается относительно оси x на угол φ .

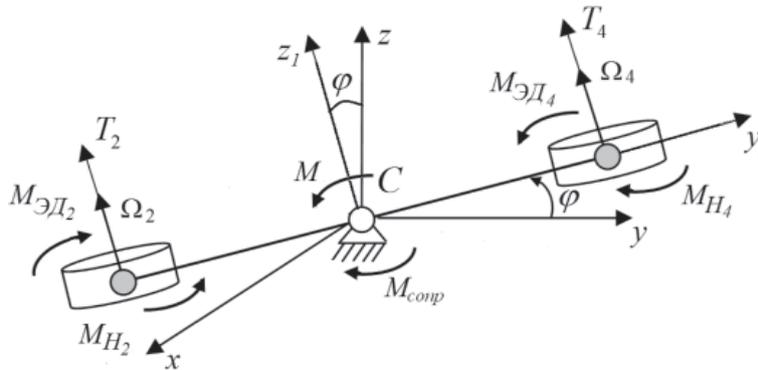


Рис. 1. Расчётная схема квадрокоптера при для изучения движений относительно оси S_x

За обобщенную координату примем угол поворота φ . Колебания квадрокоптера происходят под действием сил T_2, T_4 , момента сопротивления $M_{сопр} = \mu\varphi$ и момента внешнего периодического воздействия M . Винты приводятся во вращение электродвигателями, генерирующими моменты $M_{ЭД}$, а вращению винтов с угловыми скоростями ω_i препятствует момент внешних нагрузок M_{Ni} (рис. 2).

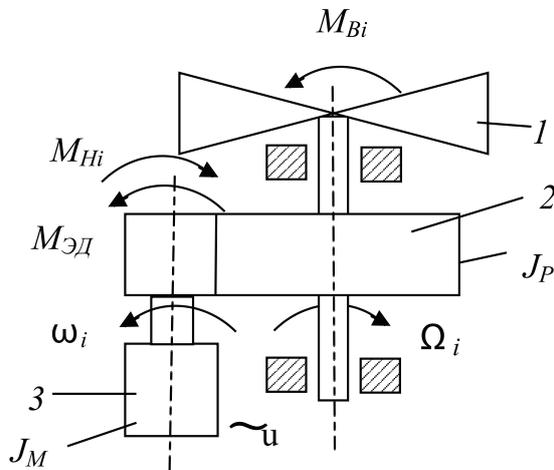


Рис. 2. Упрощенная схема электропривода винта:

- 1 – винт; 2 – редуктор; 3 – электродвигатель;
- u – управляющее напряжение;
- $M_{ЭД}$ – момент, создаваемый электродвигателем; M_{Ni} – момент внешних нагрузок винта относительно оси вращения;
- M_{Vi} – крутящий момент винта;
- J_p, J_m – момент инерции ротора вокруг оси винта и оси мотора соответственно;
- ω, Ω_i – угловые скорости электродвигателя и пропеллера соответственно

Пусть момент внешнего периодического воздействия представлен в виде

$M = M_0 \sin(\omega_0 t)$, где M_0, ω_0 – амплитуда и частота внешнего возмущения.

Восстанавливающий момент, действующий на корпус со стороны электроприводов винтов, определяется величиной управляющих напряжений, поступающих из системы автоматического управления на левый и правый электроприводы. Причем уровень напряжений, формируемых усилителем мощности САУ, полностью зависит от типа регулятора.

Дифференциальные уравнения для двух винтов, которые описывают взаимосвязанные электромагнитные и механические процессы в электромеханической системе приводов винтов квадрокоптера, имеют вид:

$$\begin{cases} J_i \frac{d\omega_i}{dt} = M_{ЭДi} - M_{Ni}, & i = 2, 4, \\ L_i \frac{di_i}{dt} + i_i R_i + c_E \omega_i = u_i(\varphi), \end{cases} \quad (1)$$

где L_i, R_i – индуктивность и активное сопротивление обмотки ротора; u_i – управляющее напряжение, i – ток в обмотке электромагнита, ω_i, Ω_i – угловые скорости электродвигателя и пропеллера соответственно; c_E – коэффициент пропорциональности, называемый постоянной ЭДС двигателя; J_i – приведенный осевой момент инерции.

Момент, создаваемый электродвигателями:

$$M_{ЭДi} = c_{Mi} \cdot i_i, \quad (2)$$

где c_{Mi} – коэффициент пропорциональности момента.

Связь между угловой скоростью электродвигателя ω_i и винта Ω_i :

$$\omega_i / \Omega_i = N, \quad (3)$$

где N – передаточное отношение редуктора.

Момент внешних нагрузок M_{Hi} будем определять как

$$M_{Hi} = \frac{M_{Bi}}{N \cdot \eta} = \frac{\mu \Omega_i^2}{N \eta}, \quad i = 2, 4. \quad (4)$$

где $M_{Bi} = \mu \Omega_i^2$ – момент сопротивления вращению винта; μ – коэффициент нагрузки, приведенный к валу двигателя; η – КПД электропривода.

$$M_x^e = -T_2 l + T_4 l = lb_z (-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) - \mu \dot{\phi} + M_0 \sin(\omega_0 t), \quad (6)$$

где l – расстояние между центром квадрокоптера и центром пропеллера; b_z – аэродинамическая постоянная.

С учетом (6) уравнение (5) будет иметь вид

$$J_x \ddot{\phi} = lb_z (-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) - \mu \dot{\phi} + M_0 \sin(\omega_0 t). \quad (7)$$

Система дифференциальных уравнений (1), (7) описывает колебания квадрокоптера относительно оси Sx при внешнем периодическом воздействии. В общем случае система является нелинейной и её решение удобно выполнить с помощью численных методов. Однако, сделав некоторые предположения, можно получить аналитическое решение. Пусть электродвигатели, используемые в квадрокоптере, обладают небольшой индуктивностью, т.е. $L_2, L_4 \cong 0$; ($\Omega_2^2 \approx \Omega_2$), ($\Omega_4^2 \approx \Omega_4$), $J_{x2} \dot{\Omega}_2 \rightarrow 0$; $J_{x4} \dot{\Omega}_4 \rightarrow 0$, тогда уравнения (1) примут вид:

$$J_x \ddot{\phi} = lb_z (\alpha_4^2 u_4^2 - \alpha_2^2 u_2^2) - \mu \dot{\phi} + M_0 \sin(\omega_0 t), \quad (11)$$

где $\alpha_2^2 = \alpha_4^2 = \alpha^2$.

Пусть управляющее воздействие определяется по следующему алгоритму:

$$u_2 = u_{20} + k\phi; \quad u_4 = u_{40} - k\phi, \quad (12)$$

где u_{0i} – постоянное напряжение питания; k – пропорциональный коэффициент.

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$J_x \ddot{\phi} = -lb_z \alpha^2 4u_0 k \phi - \mu \dot{\phi} + M_0 \sin(\omega_0 t) \quad (13)$$

или

$$\ddot{\phi} + 2n\dot{\phi} + \lambda^2 \phi = Q_0 \sin(\omega_0 t). \quad (14)$$

Получили уравнение вынужденных колебаний, где $Q_0 = \frac{M_0}{J_x}$; $n = \frac{\mu}{2J_x}$ – коэффициент демпфирования; $\lambda^2 = \frac{lb_z \alpha^2 4u_0 k}{J_x}$ – циклическая частота свободных колебаний.

Решение дифференциального уравнения (14) имеет вид [1]:

Движение корпуса квадрокоптера, относительно оси Sx описывается дифференциальным уравнением

$$J_x \ddot{\phi}_x = M_x^e, \quad (5)$$

где J_x – осевой момент инерции; M_x^e – главный момент внешних сил относительно оси Ox :

$$\begin{cases} a_2 u_2 = b_2 \Omega_2, \\ a_4 u_4 = b_4 \Omega_4, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$a_2 = \frac{c_{M2} N}{R_2}; \quad a_4 = \frac{c_{M4} N}{R_4};$$

$$b_2 = \frac{c_{M2} c_{E2} N^2}{R_2} + \frac{\mu}{\eta}; \quad b_4 = \frac{c_{M4} c_{E4} N^2}{R_4} + \frac{\mu}{\eta}.$$

Откуда

$$\Omega_2 = \frac{a_2 u_2}{b_2}; \quad \Omega_4 = \frac{a_4 u_4}{b_4}. \quad (9)$$

Обозначим:

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}; \quad \alpha_4 = \frac{a_4}{b_4},$$

тогда:

$$\Omega_2 = a_2 u_2; \quad \Omega_4 = a_4 u_4. \quad (10)$$

С учетом (10) уравнение (7) примет вид:

$$\phi = A e^{-nt} \sin(\lambda t + \gamma) + B \sin(\omega_0 t - \beta). \quad (15)$$

Здесь A, B – амплитуды свободных и вынужденных колебаний; γ, β – соответственно начальная фаза свободных колебаний и сдвиг фаз вынужденных колебаний по отношению к возмущающей силе.

Амплитуду и сдвиг фаз вынужденных колебаний будем определять по формулам

$$B = \frac{Q_0}{\sqrt{\left(\frac{lb_z \alpha^2 4u_0 k}{J_x} - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\mu}{J_x}\right)^2} \cdot \omega_0^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\mu \omega_0}{J_x \left(\frac{lb_z \alpha^2 4u_0 k}{J_x} - \omega_0^2\right)}. \quad (16)$$

Рассмотрим предельные случаи:

1. Если $\lambda \ll \omega_0$, тогда

$$B = \frac{M_0}{\omega_0 \sqrt{J_x^2 + \mu^2}}, \quad \beta = 180^\circ. \quad (17)$$

2. Если $\lambda \approx \omega_0$, тогда

$$B = \frac{M_0}{\mu\lambda}, \quad \beta = 90^\circ. \quad (18)$$

3. Если $\lambda \gg \omega_0$, тогда

$$B = \frac{M_0}{J_x \lambda^2}, \quad \text{tg}\beta = 0. \quad (19)$$

Анализ уравнений показывает, что при высокочастотных возмущениях (17) в режиме $\lambda \ll \omega_0$ на величину амплитуды вынужденных колебаний оказывает влияние коэффициент сопротивления μ и частота внешнего возмущения ω_0 , причем с возрастанием последних амплитуда колебаний падает.

При низкочастотных возмущениях (19) в режиме $\lambda \gg \omega_0$ коэффициент сопротивления μ и частота внешнего возмущения ω_0 не оказывают воздействия на величину амплитуды вынужденных колебаний, а влияет осевой момент инерции J_x , повышающий стабильность квадрокоптера и частота свободных колебаний λ , которая зависит от геометрических размеров квадрокоптера, аэродинамических коэффициентов, свойств электроприводов,

управляющего напряжения, передаточного числа редуктора, коэффициента усиления пропорционального регулятора системы автоматического управления.

При частоте возмущения, равной частоте собственных колебаний системы ($\lambda \approx \omega_0$), амплитуда вынужденных колебаний значительно возрастает (18), диссипативные силы уравниваются силами инерции при любом значении амплитуды колебаний. Внешняя возмущающая сила оказывается неуравновешенной. Поэтому амплитуда колебаний квадрокоптера, определяемая коэффициентом сопротивления μ и частотой свободных колебаний λ , в режимах, близких к резонансному, может быть значительной.

Исследование влияния частоты внешнего периодического воздействия на амплитуду вынужденных колебаний для различных коэффициентов усиления пропорционального регулятора системы автоматического управления (САУ) (рис. 3) показывает, что присутствует область частот, при которых амплитуда резонансных вынужденных колебаний корпуса квадрокоптера минимальна.

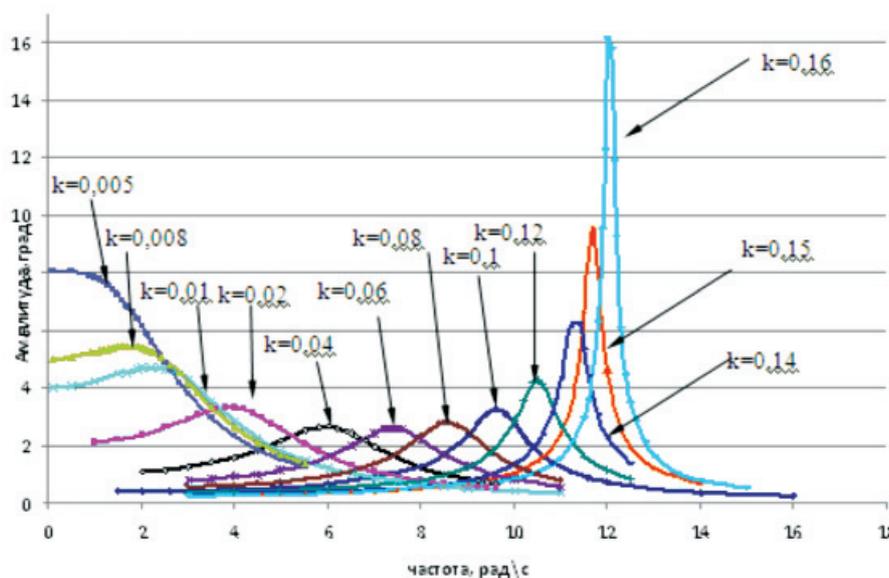


Рис. 3. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от величины коэффициента усиления пропорционального регулятора

Выводы

Анализ полученных результатов показал, что амплитуда колебаний квадрокоптера при внешнем периодическом воздействии зависит от частоты внешних возмущений. Имеет место ярко выраженная резонансная зона, в которой происходит значительное увеличение амплитуды, зависящее от диссипативных свойств

и конструкции коптера. Величина собственной частоты колебаний коптера зависит от коэффициента усиления пропорционального регулятора, геометрических размеров коптера, величины управляющего напряжения и аэродинамических характеристик винтовых приводов коптера. Установлено, что существует область параметров коэффициента пропорциональности

регулятора, обеспечивающих минимальное значение амплитуды вынужденных колебаний.

Список литературы

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Браверман А.С., Вайнтруб А.П. Динамика вертолета. Предельные режимы полета. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. Емельянова О.В., Попов Н.И., Яцун С.Ф. Моделирование движения квадроскопического летающего робота // Актуальные вопросы науки. Материалы VIII Международной научно-практической конференции. – М., Спутник+. 2013. – С. 6–8.
4. Емельянова О.В., Попов Н.И., Яцун С.Ф. Моделирование движения квадрокоптера в пространстве // Авиакосмические технологии (АКТ-2013). Труды XIV Всероссийской научно-технической конференции и школы молодых ученых, аспирантов и студентов. – Воронеж: ООО Фирма «Элист», 2013. – С. 131–138.
5. Загордан А.М. Элементарная теория вертолёта. Военное издательство Министерства Обороны Союза ССР. – М., 1955. – 216 с.
6. Яцун С.Ф., Емельянова О.В., Попов Н.И. Изучение движения квадрокоптера в вертикальной плоскости // Актуальные вопросы технических наук (II): материалы международной заоч. науч. конф. – Пермь: Меркурий, 2013. – С. 66–69.
7. Bresciani T. Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic control, Lund University, October 2008, p. 170.
8. Tahar M., Zemalache K.M., Omari A. Control of under-actuated X4-flyer using integral Backstepping controller. *Przeglad elektrotechniczny* (Electrical review), ISSN 0033-2097, R.87 NR 10/2011, P. 251–256.
9. Bemporad A., Rocchi C. Decentralized linear time-varying model predictive control of a formation of unmanned aerial vehicles/ 50th IEEE Conference on decision and control and European control conference, Orlando, FL, USA, 1011, P. 7488–7493.

References

1. Biderman V.L. *Teorija mehanicheskikh kolebanij* (Theory of mechanical oscillations). M.: The higher school, 1980. pp. 408.
2. Braverman A.S., Vajntsub A.P. *Dinamika vertoleta. Predel'nye rezhimy poleta* («Dinamika of the helicopter». Limit modes of flight). M.: Mechanical engineering, 1988. pp. 280.

3. Emelianova O.V., Popov N.I., Jatsun S.F. *Modelirovanie dvizhenija kvadrorotacionnogo letajushhego robota. Aktual'nye voprosy nauki. Materialy VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii.* («Modeling of movement of the quadrotor helicopter flying robot». Topical issues of science. Materials VIII of the International scientific and practical conference.) Moscow, Satellite+. 2013. pp 6–8.

4. Emelianova O.V., Popov N.I., Jatsun S.F. *Modelirovanie dvizhenija kvadrokoptera v prostranstve. Aviakosmicheskie tehnologii (AKT-2013). Trudy XIV Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii i shkoly molodyh uchenyh, aspirantov i studentov.* («Modeling of movement of a quadrotor helicopter in space». Aerospace technologies (AKT-2013). Works XIV of the All-Russian scientific and technical conference and school of young scientists, graduate students and students). Voronezh: JSC Firm Elist, 2013. pp. 131–138.

5. Zagordan A.M. *Jelementarnaja teorija vertoljota.* («Elementary theory of the helicopter»). Military publishing house of the Ministry of Defence of USSR. Moscow, 1955. pp. 216.

6. Jatsun S.F., Emelianova O.V., Popov N.I. *Izuchenie dvizhenija kvadrokoptera v vertikal'noj ploskosti. Aktual'nye voprosy tehniceskikh nauk (II): materialy mezhdunarodnoj zaoch. nauch. konf.* («Studying of movement of a quadrotor helicopter in the vertical plane». Topical issues of technical science (II): materials of the international correspondence scientific conference). Perm, Mercury, 2013. pp. 66–69.

7. Bresciani T. Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic control, Lund University, October 2008, pp. 170.

8. Tahar M., Zemalache K.M., Omari A. Control of under-actuated X4-flyer using integral Backstepping controller. *Przeglad elektrotechniczny* (Electrical review), ISSN 0033-2097, R.87 NR 10/2011, pp. 251–256.

9. Bemporad A., Rocchi C. Decentralized linear time-varying model predictive control of a formation of unmanned aerial vehicles/ 50th IEEE Conference on decision and control and European control conference, Orlando, FL, USA, 1011, pp. 7488–7493.

Рецензенты:

Локтионова О.Г., д.т.н., доцент, проректор по учебной работе, ФГБОУ ВПО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск;

Кобелев Н.С., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теплогазоснабжения и вентиляции, ФГБОУ ВПО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск.

Работа поступила в редакцию 27.01.2014.