

УДК 627.81 (470.40): 502.51: 519.87

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ ПЕНЗЕНСКОГО ВОДОХРАНИЛИЩА

Щепетова В.А., Кузина В.В.

ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»,
Пенза, e-mail: shchepetovav@mail.ru

Предметом статьи является создание математической модели процесса массопереноса загрязняющих веществ при залповых сбросах в водные объекты. В связи с тем, что система оценки качества окружающей среды на основе предельно допустимых концентраций имеет много недостатков, например, не учитывает взаимодействие различных загрязняющих веществ между собой, аккумуляцию в организмах, взаимодействие с донными отложениями и т.д., поэтому была предпринята попытка оценки состояния водных экологических систем с помощью метода математического моделирования. Данный метод позволяет не только определять качественный и количественный состав природных вод при антропогенном воздействии, но и дает возможность прогноза протекания тех или иных химических и физико-химических процессов, происходящих в водной экологической системе с учетом гидрологических и гидрохимических параметров рассматриваемого природного объекта. Получены зависимости концентраций загрязняющих веществ от времени и расстояния, а также проводится сравнение полученных показателей с предельно допустимыми концентрациями.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, загрязняющие вещества, предельно-допустимые концентрации, диффузия, конвекция, водохранилище

MATHEMATICAL MODELING AS METHOD OF THE FORECASTING OF THE CHANGE THE CONDITION WATER EKOSISTEM ON EXAMPLE PENZENSKOGO VODOHRANILISCHA

Schepetova V.A., Kuzina V.V.

FGBOU VPO «Penzenskiy state university of the architecture and construction»,
Penza, e-mail: shchepetovav@mail.ru

The Subject of the article is a creation to mathematical model of the process of the carrying the masses polluting material under simultaneous unset in water objects. Whereas, system of the estimation quality surrounding ambiances on base at most-possible concentration has much defects such as, for instance, does not take into account the interaction different polluting material between itself, cumulation in organism, interaction with bottom postponing and etc so it was undertaken attempt of the estimation of the condition of the water ecological systems, by means of method of mathematical modeling. The Givenned method allows not only to define qualitative and quantitative composition of natural water under negative influence, but also enables the forecast of the passing that or other chemical and physico-chemical processes, occurring in water ecological system with provision for physical and chemical parameter considered natural object. They Are Received dependencies concentration polluting material from time and distances, as well as is conducted comparison of the got factors with at most-possible concentration.

Keywords: mathematical modeling, differential equations, polluting material, at most-possible concentrations, diffusion, convection, vodohranilischa

В настоящее время в научных и производственных кругах осознана ограниченность концепции нормирования сбросов загрязняющих веществ в водные объекты, которая основана на системе предельно допустимых концентраций. Санитарно-гигиенические нормативы обеспечивают защиту здоровья человека, тогда как контроль с помощью предельно допустимых концентраций (ПДК) не защищает экосистемы от различных видов загрязнения. Система критериев оценки качества окружающей среды на основе ПДК имеет много недостатков, например, она не учитывает взаимодействие различных загрязняющих веществ между собой, аккумуляцию в организмах, взаимодействие с донными отложениями и т.д. Несмотря на то, что ускорены темпы нормирования загрязняющих веществ в окружающей среде, на сегодняшний день

нормативы все еще не могут в полной мере отвечать требованиям.

Трудности нормирования заключаются в том, что для большинства загрязняющих веществ, ПДК которых установлены, нет надежных аналитических методов контроля; часто нормируются одни формы веществ, а в водных объектах присутствуют другие, с иными ПДК. Например, токсичность загрязняющих веществ зависит от конкретных гидрохимических, гидробиологических ситуаций, на фоне которых она проявляется; процессы трансформации загрязняющих веществ в водных экосистемах включают в себя целый ряд стадий, причем часто промежуточные продукты оказываются более токсичными, чем исходные загрязняющие вещества и т.д. Кроме того, важно учитывать, какую функцию выполняет исследуемый водный объект, и в зави-

симости от этого, предъявлять те или иные требования к качеству воды.

Одним из важнейших факторов, оказывающих отрицательное воздействие на здоровье человека и среду его обитания, является загрязнение воды, поскольку она является не только средой распространения вредных сбросов, но и непосредственным источником поступления загрязняющих веществ, содержащихся в сбросах промышленных предприятий и автотранспорта, в организм человека. Так как опасность нежелательных последствий изменения водной среды возрастает ежегодно, методы исследования системы «человек – природная среда» должны совершенствоваться. Одним из наиболее часто применяемых в современной науке является метод математического моделирования.

Математическое моделирование предполагает последовательное выполнение следующих этапов: построение математической модели исследуемого процесса, разработка алгоритма вычисления и программы реализации его на компьютере. Математическая модель есть приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира с помощью математической символики. Математические модели реальных исследуемых процессов сложны и включают системы нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Ядро математической модели – дифференциальные уравнения в частных производных. Изучение математических моделей производится на основе методов вычислительной математики, основу которых составляют разностные методы решения задач математической физики. Современный этап прикладной математики характеризуется исследованием математических моделей с широким использованием вычислительных средств [4].

Пензенское водохранилище является источником питьевого водоснабжения г. Пензы и г. Заречного. Учитывая столь стратегически важное значение, мы провели анализ гидрологических параметров, таких как геологическое строение и свойства грунтов; гидрохимические, гидробиологические показатели и состояние ихтиофауны Пензенского водохранилища за 2008 – 2010 годы. Нами была проведена оценка качества воды с помощью методических указаний, разработанных Гидрохимическим институтом (ГХИ) Федеральной службы России по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Росгидромет), «Метод комплексной оценки степени загрязненности поверхностных вод по гидрохимическим показателям» [5]. Изучены основные источники загрязнения

поверхностных вод Пензенского водохранилища. В качестве исследуемых веществ были выбраны тяжелые металлы: никель, кадмий, цинк, ртуть – в связи с тем, что в последние годы наметился рост их концентрации в водной среде. Кроме того, для прогнозирования дальнейшего состояния Пензенского водохранилища важно знать скорость распространения тяжелых металлов в водной среде.

Для постановки задачи были проанализированы возможные пути их попадания в исследуемый водный объект, начальные концентрации тяжелых металлов.

Загрязнение воды в Пензенском водохранилище возможно в результате как непосредственного разлива жидких загрязняющих веществ (ЗВ) в водоём, так и разлива ЗВ на грунт с последующим смешиванием с грунтовыми водами и выносом их в водохранилище посредством ручьев, рек.

Нами были рассмотрены диффузионный, конвективный и диффузионно-конвективный механизмы распространения загрязняющих веществ в воде.

Диффузионный механизм распространения ЗВ используется при описании процессов в водоемах со стоячей или слаботекущей водой (водохранилищ, прудов, озер, каналов, трубопроводов и т.п.). В основе построения математической модели преимущественно диффузионного переноса вещества лежит уравнение диффузии.

Интенсивность попадания и перемешивания ЗВ в водных массивах зависит от климатических условий, рельефа, особенностей ландшафта, почвы местности и т.п.

Рассмотрим одномерную задачу диффузии применительно к узкому протяженному водоему со стоячей водой: малой речке, ручью, трубе или каналу, в который попадает ограниченный объем загрязнителя. В этой экологической ситуации задачу можно считать одномерной, т.е. шириной и глубиной водоема пренебречь, поскольку они незначительны по сравнению с длиной, рассматривать диффузию только в одном направлении – по длине водоема.

Для математического моделирования процессов диффузии [1–3] в одномерных случаях используются дифференциальные уравнения параболического типа, поскольку физические процессы могут быть охарактеризованы функциями двух независимых переменных: одной пространственной координаты и времени.

Задача одномерной диффузии с начальными условиями имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$C(0, t) = C_0; \quad C(x, 0) = 0,$$

где C – концентрация вещества; C_0 – начальная концентрация; t – время распространения, x – длина исследуемого участка.

Математическая постановка задачи диффузии в этом случае совпадает с математической постановкой задачи теплопроводности для расчета распределения тепла в полубесконечном стержне.

Используя представление решения в виде интеграла Пуассона

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \phi(\xi) d\xi, \quad (2)$$

можно получить решение в виде:

$$C(x, t) = C_0 [1 - \Phi(z)], \quad (3)$$

где $\phi(\xi)$ – действие начальной концентрации; $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$ – функция ошибки для $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$.

Заметим, что, используя уравнение (3), можно находить распределение концентрации $C(x, t)$, а также оценивать время, за которое концентрация ЗВ в точке с координатой x в водоеме станет больше предельно допустимой.

Для оценки времени t_n достижения предельно допустимых значений концентрации примеси C_n в некоторой точке канала x , ее можно представить как $C_n = \gamma \cdot C_0$, где $\gamma < 1$. Затем, воспользовавшись соотношением

$$C_n = C_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt_n}}\right) \right], \quad (4)$$

выразить

$$t_n = \frac{x^2}{4D^2 k^2},$$

где k – корень уравнения, $\Phi(z) = 1 - \gamma$.

Из литературных источников видно, что неорганические ЗВ имеют коэффициенты диффузии от 0,4 до 3,0 см²/сутки, а органические – от 0,3 до 1,8 см²/сутки.

На практике при загрязнении водоемов промышленными сточными водами концентрация ЗВ в источнике поддерживается на постоянном уровне C_0 , в начале канала происходит поступление вещества, что неизбежно приводит к некоторой конвекции. Для частичного учета этого фактора можно вводить коэффициент продольного перемешивания, или коэффициент конвективной диффузии, который на один – два порядка больше расчетных значений коэффициен-

та диффузии (определяется экспериментально).

Для одномерной задачи диффузии при постоянно действующем источнике загрязнения начальные и краевые условия примут вид: $C(0, t) = C_0(t)$, $C(x, 0) = 0$, $C(0, 0) = C_0$, $C(\infty, t) = 0$. При этом считается, что $C_0(t)$ – известная зависимость разбавления начальной концентрации источника C_0 со временем t , например, в первом приближении можно принять $C_0(t) = C_0 - k \cdot t$.

Так как Пензенское водохранилище можно отнести к плоскому водоему, то удобнее рассматривать задачу распространения тяжелых металлов в плоском пространстве, решая двухмерную задачу диффузии.

Представим, что попадание тяжелых металлов в водоем происходит на некотором участке границы водоема (рис. 1). Этот случай достаточно распространен, например, при сбросах загрязняющих веществ в обширный, неглубокий водный массив.

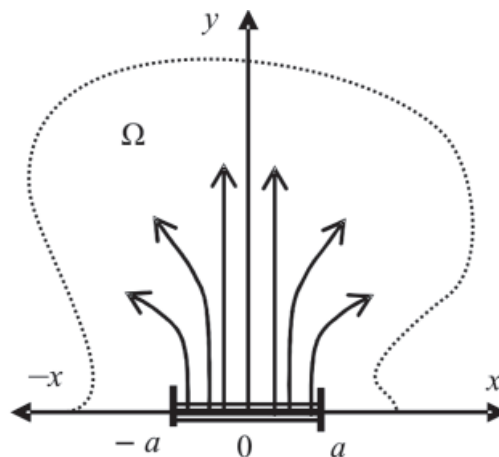


Рис. 1. Источник постоянной мощности на участке границы $[-a; a]$

Будем считать, что размеры той части границы, через которую происходит загрязнение, малы в сравнении с размерами всей границы водоема. Кроме того, будем считать, что распределение тяжелых металлов по глубине водоема происходит равномерно, и основной процесс диффузии происходит по длине и ширине водоема.

Эти предположения дают возможность рассматривать двухмерное уравнение диффузии, заданное в некоторой области Ω , которое имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Для случая, когда на участке границы от $-a$ до $+a$ находится постоянно действующий источник загрязнения с плотностью

$p(x, t)$, а начальная концентрация ЗВ в пространстве равна нулю, в качестве граничных условий можно выбрать следующие:

$$C(x, y, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} p(x, t) & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } x \notin [-a, a], \end{cases} \quad (6)$$

где $p(x, t)$ – плотность потока примеси; x, y – соответствующие координаты по длине и ширине водоема.

$$C(x, 0) = C_0; \quad -a \leq x \leq a;$$

$$C(x, y) \Big|_{y=\infty} = 0; \quad C(x, y) \Big|_{x=\pm\infty} = 0.$$

Аналогичную задачу можно рассмотреть для трехмерного характера распространения ЗВ – сферическую диффузию. Такая экологическая ситуация характерна для случая, когда источник загрязнения находится в неограниченном пространстве, например, на некоторой глубине водоема, а в окружающей среде начальная концентрация равна нулю, то есть $C(r, 0) = 0$ при $r \neq 0$. Распространение примеси в однородной среде происходит симметрично во всех направлениях: x, y, z . Следовательно, уравнение пространственной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

где D – коэффициент диффузии; C – концентрация ЗВ в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t .

В сферической системе координат уравнение (7) можно представить в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right). \quad (8)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – радиус-вектор точки с координатами (x, y, z) .

Задачи, учитывающие движение воды, имеют более сложную математическую постановку.

На основании данных математических выражений нами были проведены расчеты, которые позволяют определить концентрации загрязняющего вещества при попадании некоторого его количества в водоем за определенный промежуток времени.

Расчеты проводились с использованием интегрированной системы MathCAD, полученные результаты частично представлены на рис. 2–4.

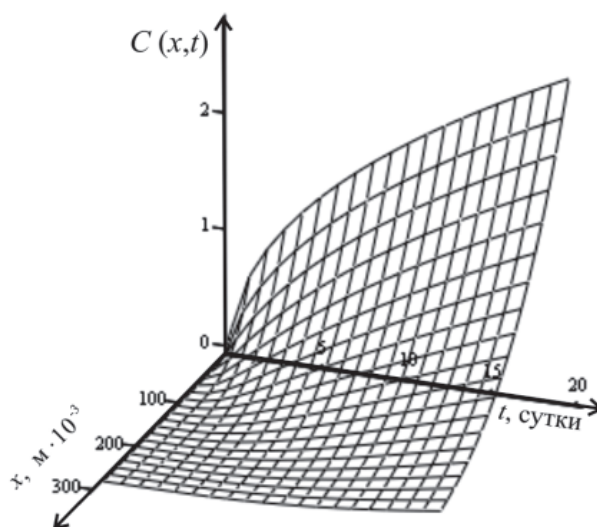


Рис. 2. Зависимость изменения концентрации ЗВ в различных сечениях при одномерной диффузии

На рис. 3 показано, как изменяется время достижения предельно допустимой концентрации C_n при изменении начальной концентрации вещества в десять раз: 1 – при $C_0 = 1$ М/л; 2 – при $C_0 = 10$ М/л.

Пример распределения концентрации в точках плоского водоема, примыкающих к источнику загрязнения при фиксированном времени t , приведен на рис. 4.

Для проверки адекватности математических моделей проводится численная имитация натурального эксперимента, и полученные расчетные значения концентрации ЗВ в зависимости от координаты x сопоставляются с результатами реального натурального эксперимента.

Проведенное сравнение позволяет сделать вывод, что полученные в результате численного эксперимента значения хорошо согласуются с опытными данными.

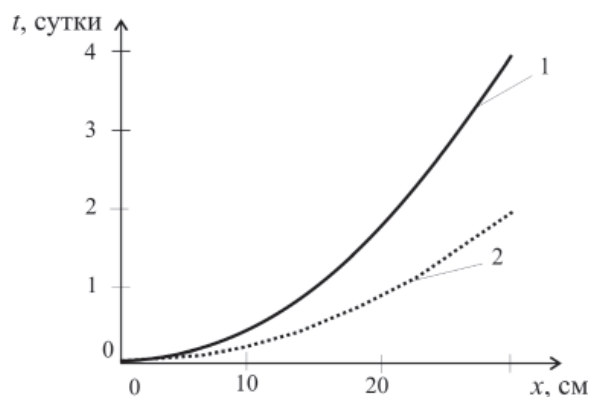


Рис. 3. Зависимость времени достижения C_n от расстояния для одномерной диффузии при разных значениях начальной концентрации ZB

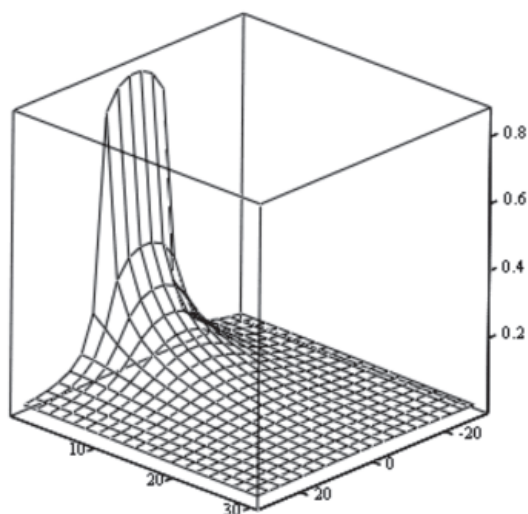


Рис. 4. Пример двумерной диффузии

Таким образом, наряду с традиционными методами, применяемыми в гидромониторинге при оценке состояния водных экосистем, возможно использование метода математического моделирования. Данный метод позволяет не только определять качественный и количественный состав природных вод при антропогенном воздействии, но и дает возможность прогноза протекания тех или иных химических и физико-химических процессов, происходящих в водной экосистеме с учетом гидрологических и гидрохимических параметров рассматриваемого природного объекта. Конечно, при составлении подобных моделей следует ограничиваться небольшим количеством факторов, учитывающих распределение загрязняющих веществ, но математическое моделирование способно прогнозировать поведение поллютантов не только во временном порядке, но и на длительное расстояние.

Список литературы

1. Кузина В.В., Кошев А.Н., Система мониторинга распространения возможных техногенных загрязнений водной среды региона на основе математических моделей и методов // Известия вузов. Строительство. – Новосибирск: изд. НГАСУ (Сибстрин). – 2008. – № 7. – С. 106–112.

2. Кузина В.В., Кошев А.Н., Математическое моделирование процессов переноса примесей в водных экосистемах региона // Математические методы в технике и технологиях: Сб. трудов XXIII Междунар. науч. конф. В 12-и т. Т. 4. Секция 4 / под общ. ред. В.С. Балакирева. – Саратов: Изд-во Саратовского гос. тех. университета, 2010. – С. 88–91.

3. Кузина В.В., Кошев А.Н., Сухов И.Ф., Математические модели мониторинга техногенных загрязнений водной среды региона // Наука и технологии. Том 2. Труды XXVIII Российской школы. – М.: РАН, 2008. – С. 251–258.

4. Роева Н.Н., Баранов А.Н., Щепетова В.А., Гребенкин Н.Н., Моделирование в экологии: монография. – Рязань: «РИД», 2011. – 188 с.; илл.

5. Щепетова В.А., Толстова Т.В., Анализ экологического состояния Пензенского водохранилища // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 8, Ч. № 1. – С. 188–189.

References

1. The Cousin V.V., Koshev A.N., System of the monitoring the spreading possible техногенных soiling the water ambience of the region on base of the mathematical models and methods // notify high school. Stroitelistvo. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin 2008, 7. pp. 106–112.

2. The Cousin V.V., Koshev A.N., Mathematical modeling of the processes of the carrying the admixtures in water ecological system of the region // Mathematical methods in technology and technology: Sb. works XXIII Mezhdunar. науч. конф. In 12-and t. T. 4. The Section 4 / Under obsch. V.S. Balakireva. Saratov: Izd-in Saratovskogo gos. tech. universiteta, 2010. pp. 88–91.

3. The Cousin V.V., Koshev A.N., Suhov I.F., Mathematical models of the monitoring the technological soiling the water ambience of the region // Science and technologies. That 2. The Works XXVIII Russian shkoly. M.: WOUNDS, 2008. pp. 251–258.

4. Roeva N.N., Ram A.N., Schepetova V.A., Grebenkin N.N., Modeling in ecologies: Monografiya. Ryazani: «RID», 2011. 188 p.

5. Schepetova V.A., Tolstova T.V., Analysis of the ecological condition Penzenskogo vodohranilisha // Fundamental studies. 2011. 8, a part 1. pp. 188–189.

Рецензенты:

Прошин И.А., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Автоматизация и управление», ФГОУ ВПО «Пензенский государственный технологический университет», г. Пенза;
Логанина В.И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Стандартизация, сертификация и аудит качества», ФГОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», г. Пенза.

Работа поступила в редакцию 19.07.2013.