

УДК 656.02 + 351.811.12

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАТРАТ В УЗЛОВЫХ ТОЧКАХ СЕТИ

Наумова Н.А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства
образования и науки РФ, Краснодар, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

В работе рассмотрена математическая модель функционирования транспортной сети, в которой поток на графе задается в виде функции плотности распределения интервалов по времени между следующими подряд требованиями. Представлена авторская классификация узловых точек сети. Приведены параметры качества распределения потоков для узловой точки: средняя задержка в узловой точке требования выбранного направления; вес вершины (узловой точки) для потока данного направления, то есть средняя суммарная задержка всех требований потока данного направления в узловой точке в единицу времени; вес вершины (узловой точки), то есть средняя суммарная задержка всех требований в узловой точке в единицу времени. Разработан метод определения функции транспортных затрат в случае справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени между требованиями по обобщенному закону Эрланга.

Ключевые слова: сетевые потоки, функция транспортных затрат, узловые точки, обобщенное распределение Эрланга

THE METHOD OF DETERMINING FUNCTIONS OF TRANSPORT COSTS AT THE NODAL POINTS IN THE NETWORK

Naumova N.A.

Kuban State Technological University Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

The mathematical model of the transport network, in which the network flow is specified as a function of the density of distribution of the intervals of time between consecutive requirements, was developed. We introduced our classification of nodes as well as the criteria of efficiency of flows distribution. The analytical dependence of such indices as the mean value of delay-in-queue and the weight of node, i.e. the mean number of requests on queue, on the generalized Erlang time distribution parameters was deduced. A method for determining the function of transport costs in the case of the hypothesis on the distribution of time intervals between the requirements of the generalized law by the Erlang was deduced.

Keywords: transportation network, function of transport costs, node, generalized Erlang distribution

Проблема рационального использования существующих транспортных сетей населенных пунктов, а также планировка транспортных сетей в новых микрорайонах бесспорно актуальна в настоящее время. Существует большое количество макро- и микромоделей распределения транспортных потоков. Задачи макро моделирования базируются на поиске равновесного распределения потоков, микро моделирование решает проблемы пропускных способностей локальных участков сетей. Из-за различного характера гипотез, закладываемых в макро- и микро модели, задача обмена информацией между ними не решена ни теоретически, ни в виде программных продуктов. Сложность численного решения задачи потокового равновесия в основном зависит от аналитического задания функции транспортных затрат.

Актуальной является задача создания модели функционирования сети, позволяющей на основании минимального количества исходных данных делать адекватные прогнозы эффективности распределения сетевых потоков. Перспективной задачей является разработка микро модели транспортной динамики в узлах сети и оценка их

влияния на распределение потоков по сети. Удельные затраты на прохождение конкретной дуги зависят и от потоков по другим дугам.

Граф-представление транспортной сети

Конкретизируем основные понятия, используемые в данной работе. Назовем сетевые потоки неконфликтными, если на данном участке сети они не пересекаются, и конфликтными – в противном случае. Вершинами графа будем считать узловые точки – точки, в которых либо расположены источники или потребители информации, либо происходит пересечение конфликтных потоков. То есть узловые точки образуются пересечением многоканальных магистралей.

В работах [2, 4, 5] автор предлагает следующую классификацию узловых точек (УТ). Пусть одна часть потоков (назовем их главными) проходит через УТ беспрепятственно. Требования второй части потоков (второстепенных) ожидают возникновения достаточных интервалов по времени между требованиями главных потоков для пересечения УТ. Такая УТ названа узловой точкой первого типа.

Рассмотрим теперь узловую точку, в которой для возможности ее пересечения поочередно перекрывается движение для одной из групп неконфликтных потоков на фиксированное время. Это узловая точка второго типа.

Будем придерживаться традиционного представления сети в виде графа. Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число. Поток на графе – это совокупность однородных объектов (требований), пересылаемых из одной вершины в другую. Таким образом, поток – это некоторая функция, заданная на дугах графа. В разработанной автором модели поток на графе задается в виде функции плотности распределения интервалов по времени между следующими подряд требованиями.

Определение функции транспортных затрат для узловой точки второго типа

В работах [2, 4] подробно рассмотрены методы расчета функции транспортных затрат в случае справедливости гипотезы о распределении интервалов по времени между требованиями по закону Эрланга порядка k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Справедливость гипотезы и адекватность аналитических моделей подтверждено серией экспериментов. Согласно мнению ряда ученых [1, 3], занимающихся теорией случайных процессов, с помощью обобщенного распределения Эрланга можно аппроксимировать практически любое распределение при правильном подборе параметров. В данной работе рассмотрим функцию транспортных затрат для узловой точки второго типа при справедливости гипотезы об обобщенном распределении Эрланга.

Найдем среднее значение величины N_t – числа требований, прибывающих к данной точке дороги за интервал времени $(0; t)$. $H(t) = M(N_t)$ – функция восстановления (математическое ожидание числа прибывающих за время t требований).

$$f_k(t) = a_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + a_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \longrightarrow f_k^{(*)}(s) = a_0 \lambda_0 \frac{1}{s + \lambda_0} + a_1 \lambda_1 \frac{1}{s + \lambda_1}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0};$$

$$a_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1};$$

$$a_0 + a_1 = 1;$$

Функция распределения обобщенного закона Эрланга имеет вид:

$$f_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad (1)$$

$$\text{где } a_i = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^{k-1} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_i}; \quad \sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1.$$

Преобразование Лапласа $f^{(*)}(s)$ функции плотности распределения $f(t)$ (причем, даже в случае совпадения некоторых из параметров λ_i):

$$f^{(*)} = \frac{\lambda_0 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1) \dots (s + \lambda_{k-1})}. \quad (2)$$

Тогда преобразование функции простого процесса восстановления [3] имеет вид:

$$H_p^{(*)}(s) = \frac{f^{(*)}(s)}{s(1 - f^{(*)}(s))} \quad (3)$$

Следовательно, $H^*(s)$ представляет собой рациональную дробь и может быть разложена на простые дроби. С этой целью необходимо найти корни знаменателя дроби

$$H_p^{(*)}(s) = \frac{f^{(*)}(s)}{s(1 - f^{(*)}(s))};$$

$$s = 0 \vee f^{(*)}(s) = 1. \quad (4)$$

Таким образом, разложение $H^*(s)$ на простые дроби содержит члены:

1) от полюса $s = 0$;

2) от ненулевых полюсов в точках, являющихся корнями уравнения $f^*(s) = 1$. Причем это уравнение кроме действительных может иметь только попарно сопряженные комплексные корни, действительная часть которых $\text{Re} < s$.

При $k = 1$ получим хорошо изученное показательное распределение. Рассмотрим вид функции $H^*(s)$ в случае обобщенного закона Эрланга порядков $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

I случай) $k = 2$.

$$f^*(s) = 1; \quad \frac{a_0 \lambda_0}{s + \lambda_0} + \frac{a_1 \lambda_1}{s + \lambda_1} = 1;$$

$$s = -(a_0 \lambda_1 + a_1 \lambda_0) \vee s = 0;$$

$$s = -\frac{\lambda_1^2 - \lambda_0^2}{\lambda_1 - \lambda_0} \vee s = 0;$$

$$s = -(\lambda_0 + \lambda_1) \vee s = 0.$$

II случай) $k = 3$.

$$f_k(t) = a_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + a_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \xrightarrow{\quad} f_k^{(*)}(s) = \\ = a_0 \lambda_0 \frac{1}{s + \lambda_0} + a_1 \lambda_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + a_2 \lambda_2 \frac{1}{s + \lambda_2}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_0}; \quad a_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad a_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad a_0 + a_1 + a_2 = 1;$$

$$a_0 \lambda_0 \frac{1}{s + \lambda_0} + a_1 \lambda_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + a_2 \lambda_2 \frac{1}{s + \lambda_2} = 1;$$

$$a_0 \left(1 - \frac{s}{s + \lambda_0} \right) + a_1 \left(1 - \frac{s}{s + \lambda_1} \right) + a_2 \left(1 - \frac{1}{s + \lambda_2} \right) = 1;$$

$$s^2 + s(a_0 \lambda_1 + a_0 \lambda_2 + a_1 \lambda_0 + a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_0 + a_2 \lambda_1) + \\ + (a_0 \lambda_1 \lambda_2 + a_1 \lambda_0 \lambda_2 + a_2 \lambda_0 \lambda_2) = 0 \vee s = 0.$$

Левая часть последнего уравнения представляет собой многочлен второй степени, нахождение корней которого не вызывает затруднений.

III случай) $k = 4$.

$$f_k(t) = a_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + a_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + a_3 \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} f_k^{(*)}(s) = a_0 \lambda_0 \frac{1}{s + \lambda_0} + a_1 \lambda_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + a_2 \lambda_2 \frac{1}{s + \lambda_2} + a_3 \lambda_3 \frac{1}{s + \lambda_3}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_0} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_0};$$

$$a_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1};$$

$$a_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2};$$

$$a_3 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3};$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1;$$

$$a_0 \lambda_0 \frac{1}{s + \lambda_0} + a_1 \lambda_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + a_2 \lambda_2 \frac{1}{s + \lambda_2} + a_3 \lambda_3 \frac{1}{s + \lambda_3} = 1;$$

$$a_0 \left(1 - \frac{s}{s + \lambda_0} \right) + a_1 \left(1 - \frac{s}{s + \lambda_1} \right) + a_2 \left(1 - \frac{1}{s + \lambda_2} \right) + a_3 \left(1 - \frac{1}{s + \lambda_3} \right) = 1;$$

$$s^3 + s^2 \cdot \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^3 a_i \lambda_j \right) + s \cdot \left(\sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i \\ j < k}}^3 a_i \lambda_j \lambda_k \right) + \left(\sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i \\ j < k < l}}^3 a_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \right) = 0 \vee s = 0.$$

Левая часть последнего уравнения представляет собой многочлен третьей степени, корни которого могут быть найдены с помощью формулы Кардано.

Таким образом, изображение функции восстановления имеет вид:

$$H^*(s) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{s^2} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} \frac{1}{s} + R^*(s), \quad (5)$$

где $\mu M(T)$; $\sigma^2 = D(T)$; $R^*(s)$ – сумма простейших рациональных дробей. Следовательно, сама функция восстановления в случае обобщенного закона Эрланга имеет вид:

$$H(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + R(t). \quad (6)$$

Каждому простому действительному корню s_p соответствует дробь $\frac{A}{s - s_p}$ (слагаемое в $R^*(s)$), а ей, в свою очередь, соответствует оригинал $A \cdot e^{s_p t}$ (слагаемое в $R(t)$).

Действительному корню s_p кратности 2 соответствует в разложении сумма $\frac{A_1}{s - s_p} + \frac{A_2}{(s - s_p)^2}$ (слагаемые в $R^*(s)$).

Следовательно, оригинал имеет вид: $A_1 e^{s_p t} + A_2 t e^{s_p t}$ (слагаемые в $R(t)$).

Каждой паре комплексно-сопряженных корней $s_p = \alpha \pm i\beta$ соответствует дробь в разложении $\frac{A \cdot (s - \alpha) + B \cdot \beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$ (слагаемые в $R^*(s)$). В этом случае оригинал имеет вид: $A \cdot e^{\alpha t} \cos \beta t + B e^{\alpha t} \sin \beta t$ (слагаемые в $R(t)$).

Введем ряд обозначений, принятых автором при разработке математической модели функционирования сети. Дуга представляет собой часть многоканальной магистрали, заключенную между двумя вершинами (узловыми точками). Обозначим $\{I_j\}$ – множество дуг графа, $\{z_j\}$ – множество вершин (узловых точек). Для определения показателей эффективности распределения потоков по сети и решения оптимизационных задач введем следующие понятия:

1) $\omega_M(z_n)$ – средняя задержка в узловой точке z_n требования выбранного направления;

2) $\bar{\mu}(z_n)$ – вес вершины z_n (узловой точки) для потока данного направления, то есть средняя суммарная задержка всех требований потока данного направления в узловой точке z_n в единицу времени;

3) $\mu(z_n)$ – вес вершины z_n (узловой точки), то есть средняя суммарная задержка

всех требований в узловой точке z_n в единицу времени.

Под задержкой в УТ второго типа будем понимать время простоя в случае, если движение в данном направлении запрещено.

$$W(T_i, \lambda) = \int_0^{T_i} H_\lambda(t) dt \text{ (треб.} \cdot \text{с.)} - \text{суммарная}$$

задержка требований рассматриваемого потока за T_i секунд – время, в течение которого запрещено движение в рассматриваемом направлении. Простое аналитическое задание функции $H(t)$ в случае обобщенного распределения Эрланга позволяет элементарно получить значение функции $W(T_i, \lambda)$.

Суммарная задержка всех требований данного потока за единицу времени – один час, выражается следующим образом:

$$W(T_i, \lambda) \cdot \frac{3600}{T} \cdot \frac{1}{3600} = \frac{W(T_i, \lambda)}{T}, \text{ (треб.} \cdot \text{ч.)}, \quad (7)$$

где $T = \sum_i T_i$.

Уточним параметры качества распределения потоков для узловой точки II типа, которые представляют собой функции транспортных затрат в узловых точках сети:

$$1) \omega_M(z_n) = \frac{\sum_{i \in M} W(T_a, \lambda_i)}{\sum_{i \in M} H(T_a, \lambda_i)}, \text{ где } M - \text{мно-$$

жество выбранных направлений, $a \in \{1; 2\}$;

$$2) \bar{\mu}(z_n) = \frac{\sum_{i \in M} W(T_a, \lambda_i)}{T}, \text{ где } M - \text{множе-}$$

ство выбранных направлений, $a \in \{1; 2\}$;

$$3) \mu(z_n) = \frac{\sum_i W(T_1, \lambda_i) + \sum_j W(T_2, \lambda_j)}{T}.$$

Заключение

Результаты исследования, изложенные выше, являются обобщением проведенной автором работы по оптимизации распределения транспортных потоков по сети. Гипотеза о распределении интервалов по времени между требованиями по закону Эрланга позволила разработать математическую модель, дающую удовлетворительные по точности результаты оценивания качества функционирования сети. Кроме того, минимальный набор исходных параметров сделал менее дорогостоящей разработку базы данных для проведения оценки качества реорганизаций внутри

сети. Обобщенный закон Эрланга при правильном подборе параметров позволит с достаточной точностью аппроксимировать практически любое распределение, а следовательно, позволит увеличить рамки применимости модели на потоки более высокой плотности при прохождении ими ряда узловых точек. Это в свою очередь дает возможность увеличить точность при решении оптимизационных задач в теории транспортных потоков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект р-юг-а-13-08-96502.

Список литературы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
2. Наумова Н.А. Моделирование и программная реализация движения автотранспортных средств по улично-дорожной сети / Н.А. Наумова, Л.М. Данович – Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2011. – 80 с.
3. Cox D.R., Smith W.L. Queues, Methuen. – London, 1961.
4. Naumova N.A. Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network // Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 3. – № 1. – P. 12–19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02.
5. Naumova N., Danovich L. Modelling and Optimisation of Flows Distribution in the Network // Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 2. – № 5. – P. 171–175. doi: 10.5923/j.am.20120205.04.

References

1. Ventsel E.S., Ovcharov L.A. Teoriya sluchaynyh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya [Theory of random processes and their application in engineering], Vysshaya Shkola Publishing House, Moscow, 2000.
2. Naumova N.A., Danovich L.M. Modelirovaniye i programmaya realizatsiya dvizheniya avtotransportnyh sredstv po ulichno-dorozhnoy sety [Modelling and Simulation of Traffic in Transportation Networks]. Krasnodar, Izdatelskiy dom-Yug, 2011. 80 p.
3. Cox D.R., Smith W.L., Queues, Methuen, London, 1961.
4. Naumova N.A., Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network, Applied Mathematics, Vol. 3 no. 1, 2013, pp. 12–19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02.
5. Naumova N., Danovich L. Modelling and Optimisation of Flows Distribution in the Network, Applied Mathematics, Vol. 2 no. 5, 2012, pp. 171–175. doi: 10.5923/j.am.20120205.04.

Рецензенты:

Атрошенко В.А., д.т.н., профессор, декан факультета компьютерных технологий, ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар;
 Видовский Л.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники и автоматизированных систем управления, ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар.
 Работа поступила в редакцию 11.07.2013.