УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ САМООРГАНИЗАЦИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЕДПРИЯТИЯ ТОРГОВЛИ

Абдуллаев У.А.

ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия», Воронеж, e-mail: abdullaev.ulmas@mail.ru

В статье излагается структура и образ действий многоуровневой сбытовой системы с целью повышение эффективности управления предприятием торговли. Разработана организационная структура для производства и сбыта продукции и описана иерархическая схема продажи готовой продукции в оптовой и розничной торговле с учетом заказов потребителей. Проанализированы существующие работы по моделированию заказов потребителей с помощью логистической функции, нормального закона распределения выпускаемой продукции и определению заказов потребителей на основе анкетных опросов. Предложены и исследованы математические модели вида обыкновенного дифференциального уравнения с начальным условием для прогноза продажа выпускаемых изделий торгового предприятия. Разработан алгоритм идентификации параметров модели. В качестве алгоритма минимизации целевой функции выбран алгоритм с вещественным кодированием, который позволяет эффективно решать многоэкстремальные задачи с большой размерностью. Проведена оценка точности адекватности модели. Приведены результаты моделирования в виде таблиц и графических интерпретаций.

Ключевые слова: заказ, потребитель, товар, математическая модель, идентификация, алгоритм, прогноз

IDENTIFICATION OG MATHEMATICAL MODELS AND RESEARCH DECISION SUPPORT FOR SELF SOCIAL AND ECONOMIC SYSTEMS BUSINESS TRADE

Abdullaev U.A.

FGBOU VPO «Voronezh State Academy of Forestry», Voronezh, e-mail: abdullaev.ulmas@mail.ru

The article describes the structure and practice of multilevel marketing system in order to improve the efficiency of enterprise management trade. The organizational structure for the production and marketing of products and describes a hierarchical scheme of sale of finished goods in the wholesale and retail trade, taking into account customer orders. Analyze existing work on modeling of customer orders using the logistic function, normal distribution of the manufactured products and the definition of customer orders on the basis of questionnaires. Proposed and investigated mathematical model of the form of an ordinary differential equation with the initial condition for the forecast sales of manufactured products trading company. An algorithm for the identification of the model parameters. As an algorithm for minimizing the objective function is selected algorithm with real coding, which allows effective decision multiextremal problems with high dimensionality. The accuracy of the adequacy of the model. Simulation results in tabular and graphical interpretation.

Keywords: order, customer, product, mathematical model, identification, algorithm prediction

Описание предметной области

Решающим этапом в торгово-хозяйственной деятельности многих организаций является процесс производства и сбыта продукции. Важнейшая проблема этого этапа – приведение темпа производства и темпов продаж продукции в соответствие с требованиями конечного потребителя-заказчика. Как показывает практический опыт, темпы производства часто изменяются в больших интервалах, чем фактические темпы потребительских покупок. Известно, что сбытовая система с цепью взаимосвязанных товарных запасов и определенным порядком выдачи заказов на их пополнение имеет тенденцию усиливать небольшие изменения, возникающие в розничной торговле. Мы излагаем структуру и образ действий многоуровневой сбытовой системы [1].

На рис. 1 показана организационная структура для производства и сбыта продукции. В рисунке объектом производства могут быть любые организации, производящие товаров по заказам потребителей. Далее готовая продукция хранится на складе. Продажа готовой продукции осуществляется в оптовой и розничной торговле с учетом заказов потребителей.

Процесс выполнения заказа потребителей можно рассматривать как иерархический (рис. 1).

Для поддержания высокой производительности торгово-хозяйственной деятельности предприятий необходимо контролировать и регулировать значения управляющих параметров. Для этого требуется предварительно разработать математическую модель процесса выполнения заказов, оценить ее параметры по экспериментальным данным, а также найти оптимальные значения управляющих параметров.

Математическая модель процесса выполнения заказов потребителей

Сначала рассмотрим различные модели выполнения заказов потребителей и далее показываем задачу идентификации в обобщенном виде.

1. Моделирование заказов потребителей с помощью логистической функции. Заказ на многие товары с течением времени возрастает: сначала медленно, затем быстро и, наконец, снова замедляется за счет насыщения. Это значит, что скорость увеличения заказа прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Для построения модели введем обозначения:

t – время;

y – обеспеченность товаром;

A – насыщенность товаров;

k – коэффициент пропорциональности.

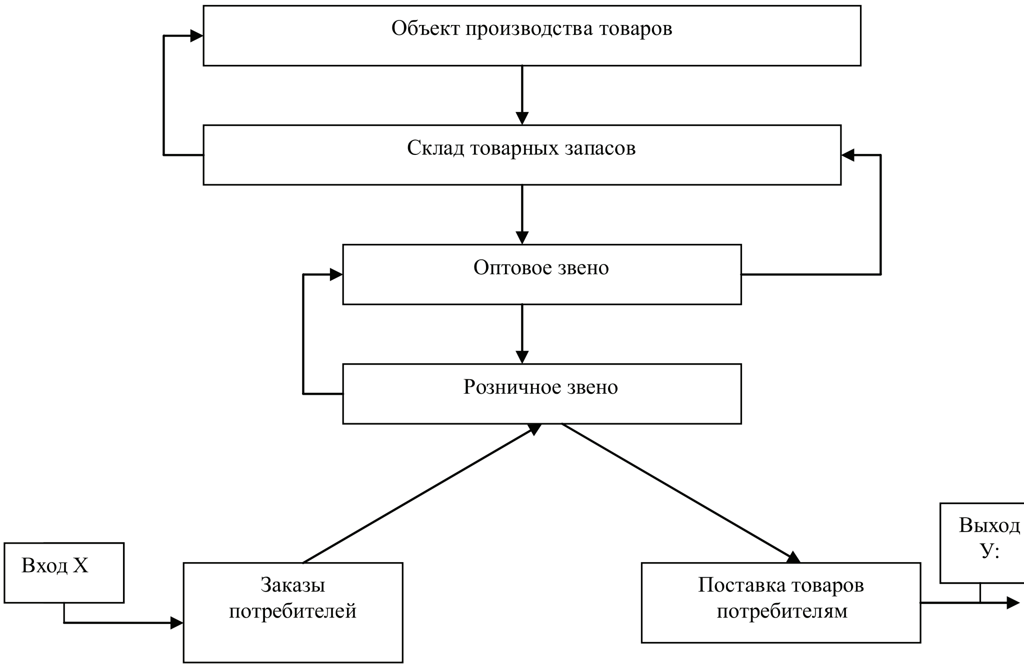

Рис. 1

Тогда зависимость обеспеченности от времени выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y),$$

и получаем решение этого уравнения в виде логистической функции

$$y = \frac{A}{1 + Ce^{-kAt}},$$

где параметры A и k определяются по методу наименьших квадратов. Для нахождения постоянной C можно потребовать, чтобы функция проходила через последнюю точку, то есть выполнялось условие

$$y_m = \frac{A}{1 + Ce^{-kAm}}.$$

Решая последнее уравнение относительно C, получаем

$$C = \frac{A - y_m}{y_m e^{-kAm}}.$$

Окончательно получим формулу зависимости заказа от времени

$$y = \frac{Ay_m}{y_m + (A - y_m)e^{-kA(t-m)}}.$$

Прогноз заказов получают при подстановке в эту формулу значений $t > m$.

2. Моделирование заказов с помощью логарифмически нормального закона. В основе такой модели используется гипотеза о том, что обеспеченность товаром подчиняется интегральному логарифмически нормальному закону

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(\ln z - \alpha)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

где $y(t)$ – обеспеченность товаром к моменту времени t; α, σ – неопределенные параметры функции.

Очевидно, для этой гипотезы при всех t должны выполняться неравенства $0 \le y(t) \le 1$. Чтобы пользоваться формулой интегрального логарифмически нормального закона, надо определить параметры α и σ. С этой целью делают замену переменных $x = \left(\ln z - \frac{\alpha}{\sigma}\right)$, тогда получают

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dz.$$

В этой формуле выражение справа является интегралом Гаусса, для которого составлены таблицы значений.

Для определения α и σ применяют формулу

$$x_t=\frac{\ln t-\alpha}{\sigma}.$$

Зная значения $y(t)$ за прошлые годы $t = 1, 2, ..., m$, из таблиц для интеграла Гаусса находят x_t ($t = 1, 2, ..., m$). Обозначив, $a=\frac{1}{\sigma}$; $b=\frac{\alpha}{\sigma}$, получают $x_t = a\ln t - b$.

Применяя метод наименьших квадратов, находят a и b, при которых

$$\sum_{t=1}^{m}(a\ln t-b-x_t)^2\to\min.$$

Затем находят $\sigma=\frac{1}{a}$; $\alpha=b\sigma=\frac{b}{a}$.

Тогда получают известную функцию, с помощью которой можно определить прогноз обеспеченности $y(t)$ если $t > m$.

Можно также решать задачу определения номера года t_1, в котором обеспеченность достигает заранее заданного значения. Для этого считается известным $y(t_1) = y_1$, затем по таблицам для интеграла Гаусса находят x_{t_2} и, наконец, находят t_1, $t_1=e^{\alpha+\beta x_{t_1}}$. Этот метод можно использовать и в том случае, когда обеспеченность $y(t) > 1$, но для этого надо знать предельное значение обеспеченности и в качестве $y(t)$ рассматривать $y(t)/A$.

3. Определение заказов на основе анкетных опросов. Этот метод использует анкеты, содержащие сведения о желаемой очередности покупок определенного набора товаров, а также данные о реальной очередности покупок этих товаров в прошлом. На основании этих данных определяют вероятности P_{ij} того, что i – товар будет куплен j-м по очередности, т.е. получают квадратную матрицу вероятностей $P = (P_{ij})$. Затем определяют удельный вес покупателей s_i, имеющих в наличии i видов товаров ($i = 1, 2, ..., n - 1$). Назовем емкостью рынка набор вероятностей r_i того, что покупатель, приобретая какой-либо товар, купим именно i-е товар. Обозначим

$$S=\begin{Vmatrix}s_0\\ .\\ s_{n-1}\end{Vmatrix};\quad R=\begin{Vmatrix}r_1\\ ..\\ r_n\end{Vmatrix}$$

Тогда емкость рынка $R = PS$. Зная емкость рынка R, можно определить заказ на товары.

Рассмотрим следующий пример. Пусть на основе анкет определена матрица вероятностей очередностей покупок трех видов товаров: 1 – стиральные машины, 2 – холодильники, 3 – пылесосы. Кроме того, имеются данные об удельном весе этих товаров, имеющихся у покупателей

$$P=\begin{Vmatrix}0,90 & 0,04 & 0,06\\ 0,02 & 0,20 & 0,78\\ 0,07 & 0,80 & 0,13\end{Vmatrix};\quad S=\begin{Vmatrix}0,30\\ 0,43\\ 0,27\end{Vmatrix},$$

тогда емкость рынка будет

$$R=\begin{Vmatrix}0,90 & 0,04 & 0,06\\ 0,02 & 0,20 & 0,78\\ 0,07 & 0,80 & 0,13\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0,30\\ 0,43\\ 0,27\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0,90\cdot 0,30+0,04\cdot 0,43+0,06\cdot 0,27\\ 0,02\cdot 0,30+0,20\cdot 0,43+0,78\cdot 0,27\\ 0,07\cdot 0,30+0,80\cdot 0,43+0,13\cdot 0,27\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0,3\\ 0,3\\ 0,4\end{Vmatrix}.$$

Итак, вероятность покупки стиральной машины равна 0,3; холодильника – 0,3; пылесоса – 0,4 при условии, что покупка будет совершена. Пусть известно, число покупателей на рынке равна Q. Если считать, что покупатель обязательно купит хотя бы один из этих товаров, то спрос составит: на стиральные машины $0,3Q$, на холодильники $0,3Q$, на пылесосы $0,4Q$.

Надо отметить, что для прогнозирования заказов на товары длительного пользования используют и другие методы прогнозирования, среди которых особенно следует отметить методы, основанные на определении зависимостей заказа от величины факторов, влияющих на образование заказов. Основные положения этих методов состоят в определении главных факторов, влияющих на заказ, значений этих факторов, на прогнозируемый период и функции, выражающей зависимость заказа от главных факторов. Для выбора функции, выражающей зависимость заказа от факторов, можно применять многофакторные модели [5].

Определение научно обоснованного заказа на продукцию и особенно на товары народного потребления является сложной и очень важной задачей. Использование математических моделей и методов помогает решать эти задачей. Наиболее подходящими являются многофакторные модели. При использовании таких моделей необходимо, чтобы специалисты торговых предприятий очень тщательно отобрали основные факторы, влияющие на заказ, и получили значения этих факторов в прогнозируемом периоде. Это также является сложной задачей, но от ее решения зависит успех применения моделей. Следует отметить также, что имеются и другие подходы, методы и способы для определения заказа. Однако они имеют свои недостатки. Поэтому целесообразно выбирать метод прогнозирования с учетом специфических особенностей торговых предприятий и прогнозируемых показателей.

Идентификация математической модели обеспеченности товарами

Для практического использования вышеизложенных моделей необходимо решить задачу идентификации параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временному ряду статистических данных [2, 3].

Пусть имеется система ОДУ

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$Y(t_N) = Y_N,$$

где $y = (Y_1, Y_2, ..., Y_N) \in R^n$ – вектор фазовых переменных модели, объём товара i-го предприятия ($i = N, ..., 1$);

$a = (a_1, a_2, ..., a_3) \in R^m$ – вектор коэффициентов, неизвестные, которые принадлежат к идентификации;

$f(t, y, a)$ – вектор функции, с размерностью ($n \times m$), описывающей закономерности развития торгового объекта и имеющая первые и вторые производные правой части по y.

Для идентификации вектора коэффициентов задачу (1) запишем в виде конечно-разностных схем:

$$\begin{aligned} &Y_{k+1} = Y_k + \Delta t_k f(t_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_n); \\ &Y(t_N) = Y_N, \quad k = N-1, ...1; \\ &\Delta t_k = t_{k+1} - t_k. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для определения коэффициентов a_1, a_2, ..., a_n к уравнению (2) применим метод наименьших квадратов:

$$S = \sum_{k=N-1}^{1} \left[f(t_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_n) - \frac{Y_{k+1} - Y_k}{\Delta t_k} \right]^2 \to \min. \qquad (3)$$

Отсюда, получаем систему нормальных уравнений:

$$\sum_{k=N-1}^{1} \left[f(...) - \frac{Y_{k+1} - Y_k}{t_{k+1} - t_k} \right] \frac{\partial f(...)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, n. \qquad (4)$$

Определив постоянные коэффициенты $\{a_i, i = 1,n\}$, решив систему (4), произведем вычисления в режиме «адекватность-прогноз». Проверка адекватности модели осуществляется вычислением значении функции в точке:

$$Y(t_k), k = N-1, ..., 1.$$

Прогнозные значения функции вычисляются в точке

$$Y(t_k), \; k = N-1, N+2, ...$$

Для получения теоретических значений $y(t)$ для системы (1) решается задача Коши с начальным условием $Y(t_N) = Y_N$. Численное решение системы (1) осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-го порядка, обладающим хорошими показателями скорости сходимости при сравнительно низких вычислительных затратах. В качестве алгоритма минимизации целевой функции (3) выбран алгоритм с вещественным кодированием [4]. Этот алгоритм эффективно решает многоэкстремальные задачи и задачи высокой размерности. Программным обеспечением данной задачи являлись офисные программы Windows XP и пакет прикладных программ Maple [6].

Оценкой качества математической модели является корень из среднеквадратического отклонения теоретических и статистических значений:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y_q(t) - y_t)^2},$$

где $y_q(t)$теоретическое значение показателя в t – момент, вычисленный по q-й функции на базе всех N – точек; y_t – статистические данные по t-му году.

Результаты идентификации математической модели

Идентификация математической модели осуществлялась на примере заказа потребителей на пищевые продукты. В данном примере указана тенденция заказа на рисовые культуры. В качестве входных данных рассматривались ежегодные статистические данные по рису (табл. 1).

Таблица 1

Годы	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Число (y) заказов на рис, тыс. тонн	10 10	13	17	16	26	23	29	36	41	46	44	48

Значения параметров, используемых для идентификации модели, вычислены на основе анализа статистических данных для рассматриваемых видов сырья.

Пусть скорость обеспеченности заказа потребителей на рисовые продукты имеет линейный закон развития социально-экономических процессов предприятия торговли

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b,$$

где a и b – неизвестные параметры, которые необходимо определить по статистическим данным.

Используя вышеизложенные методики вычисления, по формулам (1)–(4) находим: $a = 1{,}8549$; $b = 4{,}9696$. Тогда конкретный вид модели имеет:

$$\frac{dy}{dx} = 3{,}70x + 4{,}9696.$$

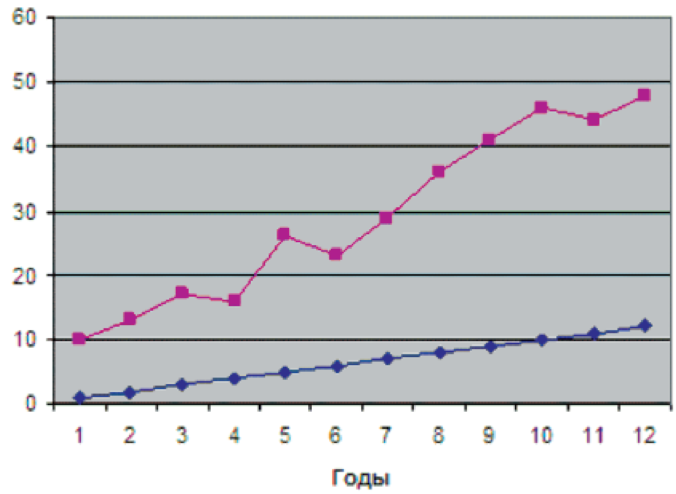

Рис. 2. Число заказов на рис (тыс. т)

Результаты моделирования на базовом периоде приведены на табл. 2, и графическая интерпретация динамики спроса на рис показана на рис. 2.

Таблица 2

X_i	Число (y) заказов на рис тыс. тонн		
	Модель	Стат.	Разница
12	49,3696	48	1,3696
11	44,7	44	0,7
10	41,9696	46	-4,0304
9	38,2696	41	-2,7304
8	34,5696	36	-1,4304
7	30,8696	29	1,8696
6	27,1696	23	4,1696
5	23,4696	26	-2,5304
4	19,7696	16	3,7696
3	16,0696	17	-0,9304
2	12,3696	13	-0,6304
1	8,0696	10	-1,9304

Анализ представленных результатов показывает, что исследуемая математическая модель достаточно хорошо описывает эмпирические зависимости для периода 2001–2012 годы.

Выводы по работе

Предложена математическая модель, описывающая процесс выполнения заказов потребителей для получения товарной продукции. Проведена идентификация параметров данной модели на примере заказов потребителей на рисовую продукцию. В работе приведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных. Их удовлетворительное соответствие показывает возможность применения предложенной модели для прогнозных расчетов. Теоретическое исследование процесса торговли, создание математических моделей позволяет, с одной стороны, производству получить максимальную прибыль, с другой стороны, выгодно и потребителю товаров. Организация процесса торговли в условиях новых хозяйственных форм и исследование поддержки принятия решений для самоорганизации социально-экономических систем предприятия торговли позволяет оптимально управлять выполнением заказов потребителей различных слоев общества.

Список литературы

1. Аницыферова В.И., Зольников В.К. Анализ подготовки специалистов по радиоэлектронике для научно-производственных и коммерческих структур в современных условиях // Моделирование систем и процессов. – 2009. – № 3–4. – С. 5–12.

2. Беляева Т.П., Зольников В.К., Чубур К.А. Экспертно-мониторинговый анализ на этапе выработки и поддержки принятия управленческих решений // Моделирование систем и процессов. – 2012. – № 1. – С. 22–27.

3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. для вузов. – М.: Лань, 2011. – 304 с.

4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2010. – 368 с.

5. Зольников В.К., Манучарян Л.А. Валидация извлеченной информации на основе онтологического описания // Моделирование систем и процессов. – 2012. – № 3. – С. 28–30.

6. Abdullaev U.A. Modeling of the development of trade-based enterprise application software package Maple // 1st International Scientific Conference, European Applied Sciences: modern approaches in scientific researches, Stuttgart, Germany December 17–19/ – 2012. – P. 139–142.

References

1. Aniciferova V.I,, Zol'nikov V.K. Analiz podgotovki specialistov po radioe'lektronike dlya nauchno-proizvodstvennyx i kommercheskix struktur v sovremennyx usloviyax // Modelirovanie sistem i processov. 2009. no. 3–4. pp. 5–12.

2. Belyaeva T,P., Zol'nikov V.K., Chubur K.A. E'kspertno-monitoringovyj analiz na e'tape vyrabotki i podderzhki prinyatiya upravlencheskix reshenij // Modelirovanie sistem i processov. 2012. no. 1. pp. 22–27.

3. Bibikov Yu.N. Kurs obyknovennyx differencial'nyx uravnenij: ucheb. dlya vuzov. M.: Lan', 2011. 304 p.

4. Gladkov L. A., Kurejchik V. V., Kurejchik V. M. Geneticheskie algoritmy: ucheb. dlya vuzov. M.: Fizmatlit, 2010. 368 p.

5. Zol'nikov V.K., Manucharyan L.A. Validaciya izvlechennoj informacii na osnove ontologicheskogo opisaniya // Modelirovanie sistem i processov. 2012. no. 3. pp. 28–30.

6. Abdullaev U.A. Modeling of the development of trade-based enterprise application software package Maple // 1st International Scientific Conference, European Applied Sciences: modern approaches in scientific researches, Stuttgart, Germany December 17–19, 2012. pp. 139–142.

Рецензенты:

Зольников В.К., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная техника и информационные системы», ВГЛТА, г. Воронеж;

Межов В.Е., д.т.н., профессор кафедры «Вычислительная техника и информационные системы», ВГЛТА, г. Воронеж.

Работа поступила в редакцию 07.06.2013