

УДК 612.7:611.72-018.3/4-092.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ИЗМЕНЕНИЙ В СУСТАВНЫХ ТКАНЯХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПО ИНТЕНСИВНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Ежов М.Ю., Берендеев Н.Н., Петров С.В.

*ФГБУ «ННИИТО» Минздрава России, Нижний Новгород, e-mail: ortho@pochta.ru;
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород;
ФГБУ «ННИИТО» Минздрава России, Нижний Новгород*

Целью исследования является изучение процесса питания суставного хряща при различных по интенсивности физических нагрузках. Была создана математическая модель влияния нагрузок на процесс диффузии питательных веществ. Гипотезой послужило предположение о величине интенсивности нагрузки и распределении питательных веществ синовиальной жидкости и крови субхондральной кости в хрящевой ткани. При периодах цикла нагружения больших нормального (4 с) наблюдается повышенный уровень питательных веществ в хрящевой ткани; при периодах цикла нагружения меньших нормального ($T_F < 2$ с) по толщине хряща начинают появляться области, в которых уровень питательных веществ либо артериальной крови, либо внутрисуставной жидкости стремится к нулю (является малым). Подобное явление может приводить к недостаточности питания ткани хряща и как следствие является причиной последующей деградации хряща.

Ключевые слова: хрящ, костная ткань, физические нагрузки

MATHEMATIC MODEL OF THE ARTICULAR FABRICS CHANGES IN VARIOUS OF INTENSITY PHYSICAL ACTIVITIES

Yezhov M.Y., Berendeev N.N., Petrov S.V.

*Nizhniy Novgorod Scientific Research Institute of Traumatology and Orthopaedy,
Nizhniy Novgorod, e-mail: ortho@pochta.ru;
N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhniy Novgorod;
Nizhniy Novgorod Scientific-Research Institute of Traumatology and Orthopaedy, Nizhniy Novgorod*

Studying of development of degenerate and dystrophic changes in articulate fabrics in experiment was a research objective. After carrying out of experiment on animals by performance of physical activities of various duration in the form of run on treadband, the mathematical model of loads influence on a condition of articulate fabrics was created. As hypothesis the assumption of a measure of intensity of the loading causing pathological changes in a joint, distribution of nutrient mediums served in articular fabric, in particular – distributions of concentration of arterial blood in a subchondral bone and intraarticular liquid. At the periods of a cycle of loading more than normal (4 c) the increased concentration of arterial blood on border of chondral fabric and an articulate bag is observed; at the periods of a cycle of loading lesser than normal ($T_F < 2$ c) on thickness of a cartilage areas in which concentration or arterial blood, or intra articular liquid aspire to zero (is small) start appearing. The similar phenomenon results in insufficiency of a food of cartilage and as a result is at the bottom of the subsequent degradation of cartilage tissue.

Keywords: cartilage, bone, physical exercises

Для изучения процесса развития остеоартроза выполняются различные типы экспериментальных исследований. Наиболее экономически выгодным и раскрывающим сущность фундаментального исследования является математическое моделирование [1–9].

Для изучения патологического процесса нами совместно с кафедрой теории упругости и пластичности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского создана математическая модель питания суставного хряща.

Целью исследования является изучение процесса питания суставного хряща.

Материал и методы исследования

Для изучения развития изменений в питании суставных тканей была построена математическая модель. Гипотезой послужило предположение о мере интенсивности нагрузки, вызывающей па-

тологические изменения в суставе, распределения питательных сред в хрящевой ткани, в частности распределения уровней внутрисуставной жидкости и артериальной крови субхондральной кости.

При исследовании процессов снабжения ткани хряща головки бедренной кости питательными веществами и кислородом с использованием математического моделирования ввели следующие основные предположения. Считаем, что во время всего процесса моделирования параметры системы неизменны: деградация свойств материалов вследствие отмирания тканей не учитывается, так как целью является изучение условий, приводящих к возможному отмиранию тканей. Характерным периодом времени, в течение которого нужно рассматривать процессы, происходящие в хряще, является период цикла нагружения T_F . Обеспечение хрящевой ткани кислородом обусловлено уровнем артериальной крови в субхондральной кости C . Обеспечение хрящевой ткани питательными веществами обусловлено составом внутрисуставной жидкости U . Для упрощения задачи на первом этапе будем проводить моделирование в одномерной постановке, причем рассматривать задачу будем в декарто-

вой системе координат, таким образом, проводится рассмотрение радиального столбца бесконечно малой площади поперечного сечения, вырезанного из хрящевой ткани и находящегося в наихудшей области.

При моделировании будем рассматривать радиальный столбик хрящевой ткани. Начало координат свяжем с головкой бедренной кости, тогда ордината $x \in [0, l]$, где l – толщина хряща.

Для изучения распределения артериальной крови в субхондральной кости была создана следующая математическая модель.

С учетом соотношений и введенной выше системы координат начально-краевая задача для нахождения концентрацией артериальной крови в субхондральной кости C примет вид:

уравнение диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(C D_c \frac{\partial \eta}{\partial x} \right);$$

$$C(x, 0) = \tilde{C}_{in};$$

краевого условия на границе с бедренной костью

$$C(0, t) = \hat{C};$$

краевого условия на границе с тазом

$$D_c \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} - C D_c \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} + \hat{J}_c = 0.$$

В соотношениях коэффициент диффузии определяется уравнением

$$D_c = D_{c0} \exp \left(-\frac{Q}{kT} \right) \exp \left(\frac{\sigma_0 V_H}{kT} \right),$$

где D_{c0} – значение коэффициента диффузии для артериальной крови в субхондральной кости в случае нулевой температуры и нулевых напряжений.

Гидростатическое давление определяется по формуле $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, при этом оно есть функция времени и пространства.

Для изучения распределения концентрации внутрисуставной жидкости в хряще предложена следующая математическая модель.

С учетом соотношений и введенной выше системы координат начально-краевая задача для нахождения концентрацией внутрисуставной жидкости в хряще U примет вид:

уравнение диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_U \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(U D_U \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Для данного соотношения вводится коэффициент диффузии, который определяется выражением

$$D_U = D_{U0} \exp \left(-\frac{Q}{kT} \right) \exp \left(\frac{\sigma_0 V_H}{kT} \right),$$

где D_{U0} – значение коэффициента диффузии для внутрисуставной жидкости в хряще в случае нулевой температуры и нулевых напряжений.

Для получения зависимости гидростатического давления от пространственных координат была построена 3D конечно-элементная модель, описывающая взаимодействие хряща головки бедренной кости и вертлужной впадины. Вид данной модели показан на рис. 1.

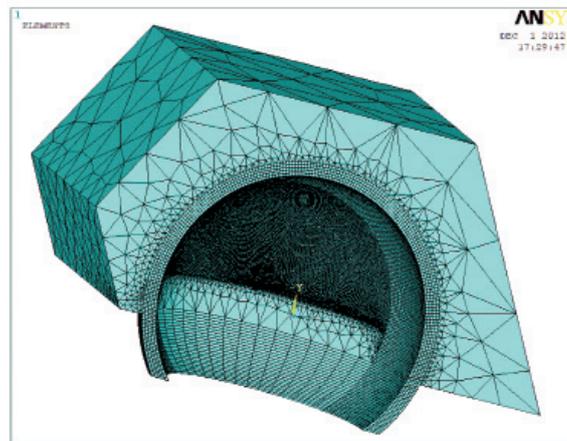


Рис. 1. Конечно-элементная модель взаимодействия хряща головки бедренной кости и вертлужной впадины

С использованием результатов конечно-элементного моделирования по направлению опасного радиуса в хряще была построена зависимость модуля гидростатического давления от координаты x . Указанная зависимость показана на рис. 2 как линия «данные». Для возможности дальнейшего использования полученных результатов указанные данные были аппроксимированы полиномом 4-й степени, имеющим вид

$$|\sigma_0| = \sum_{i=0}^4 a_i x^i.$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2F^*} \left[(F_{\max} + F_{\min}) + (F_{\max} - F_{\min}) \cos \frac{2\pi t}{T_F} \right] \cdot \sum_{i=0}^4 a_i x^i.$$

Исходя из особенностей геометрии тазобедренного сустава, характерный размер площадки контакта существенно больше толщины хряща. С учетом данного зависимости всех параметров напряженно-деформированного состояния в зоне контакта, в частности, и гидростатического давления, от усилия в суставе приближается к линейной.

Зависимость гидростатического давления от пространства и времени может быть описана следующей функцией

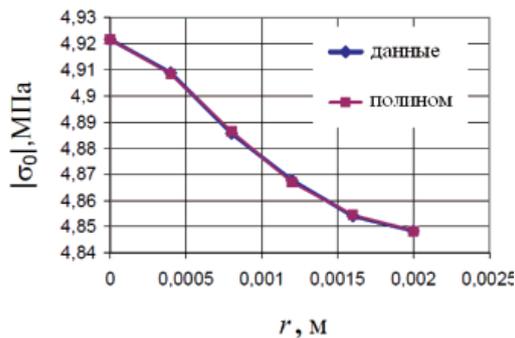


Рис. 2. Зависимость модуля гидростатического давления от пространственной координаты

В данном соотношении F^* – то значение усилия в суставе, при котором были получены коэффициенты в полиноме. Знак «минус» появляется в связи с тем, что данное соотношение для величины, а не для модуля.

Результаты исследования и их обсуждение

Было проведено численное решение поставленных краевых задач. При этом предполагалось, что на начальный момент времени концентрация как артериальной крови в субхондральной кости, так и внутрису-

ставной жидкости в хряще равны нулю, то есть в соотношениях в правой части стоят нули. С учетом предположений, высказанных различными авторами, в качестве усилия в тазобедренном суставе было выбрано значение силы 4 кН. Данное значение было принято как максимальное значение силы, минимальное значение силы было принято равным нулю: $F_{\max} = 4$ кН и $F_{\min} = 0$ кН.

В качестве меры интенсивности нагружения хряща был рассмотрен период цикла нагружения. Данная величина была рассмотрена в диапазоне от 0,125 до 4 с. В качестве нормальных условий нагружения был рассмотрен период цикла нагружения, равный 2 с.

Распределения концентрации артериальной крови в субхондральной кости в конце цикла нагружения при различных значениях периода цикла нагружения, полученные по результатам решения начально-краевой задачи, приведены на рис. 3.

Распределения концентрации внутрисуставной жидкости в хряще в конце цикла нагружения при различных значениях периода цикла нагружения, полученные по результатам решения начально-краевой задачи, приведены на рис. 4.

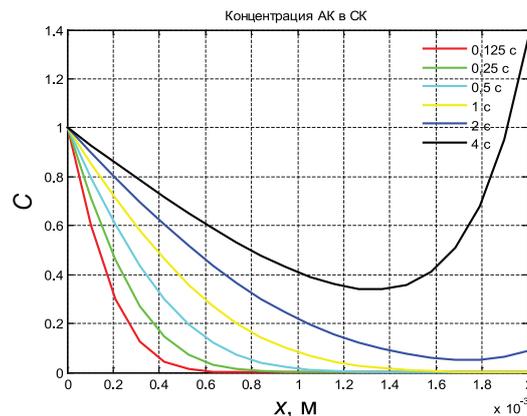


Рис. 3. Распределения концентрации артериальной крови в субхондральной кости в конце цикла нагружения

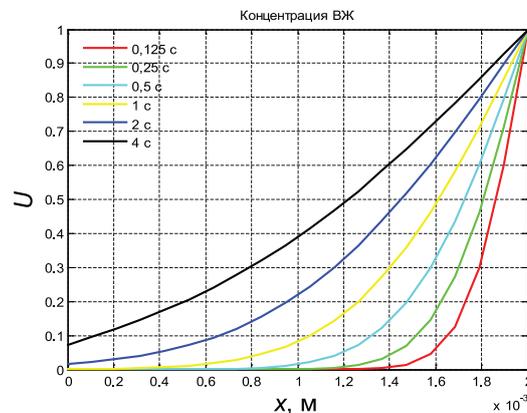


Рис. 4. Распределения концентрации внутрисуставной жидкости в хряще в конце цикла нагружения

Рассмотрена также суммарная концентрация питательных жидкостей в хряще, которая взята в виде алгебраической суммы концен-

траций C и U . Ее распределение в конце цикла нагружения при различных значениях периода цикла нагружения приведены на рис. 5.

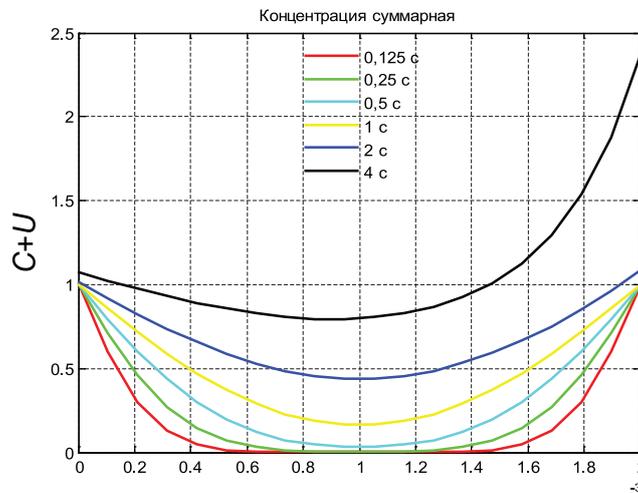


Рис. 5. Распределения концентрации питательных жидкостей в хряще в конце цикла нагружения

Для изучения влияния уровня максимальной нагрузки в цикле было проведено моделирование при нескольких значениях уровня нагрузки. Данная величина изменялась в диапазоне от 2 до 8 кН.

Анализ результатов численного моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1) выбор в качестве меры интенсивности нагрузки при изучении картин распределения питательных сред в хрящевой ткани оказался верным: вид функции распределения концентрации внутрисуставной жидкости и артериальной крови субхондральной кости полностью определяется периодом цикла нагружения (данное утверждение также подтверждается результатами численного моделирования при различных значениях максимального усилия в цикле);

2) при периодах цикла нагружения, больших нормального (4 с), наблюдается повышенная концентрация артериальной крови на границе хрящевой и костной ткани;

3) при периодах цикла нагружения, меньших нормального ($T_F < 2$ с), в толще хряща начинают появляться области, в которых уровни либо артериальной крови, либо внутрисуставной жидкости стремятся к нулю (является малой). Подобное явление должно приводить к недостаточности питания ткани хряща в данных областях и, как следствие, являться причиной последующей деградации ткани хряща.

Полученные результаты могут быть использованы для определения предельных

допустимых интенсивностей нагрузок, не приводящих к деградации хрящевой ткани в изучаемом суставе на основании допускаемых уровней внутрисуставной жидкости $[U]$ и артериальной крови субхондральной кости $[C]$. Смысл данных параметров следующий: если в какой-либо области хрящевой ткани уровень концентрации той или иной питательной среды к концу цикла нагружения ниже, чем введенные значения, то ткань может деградировать, а если больше либо равен данным параметрам, то ткань не деградирует за заданную базу эксперимента.

После введения допускаемых концентраций питательных жидкостей можно ввести по аналогии с механикой деформируемого твердого тела понятие предела выносливости хрящевой ткани. Под пределом выносливости хрящевой ткани будем понимать нагрузку с таким периодом нагружения T_{FR} , что при нагрузке, характеризующейся любым периодом, большим данной величины, материал хряща не деградирует (в течение некоторой базы эксперимента), а при нагрузке с любым меньшим периодом нагружения материал хряща деградирует за конечный интервал времени.

Таким образом, математическое моделирование показало, что процесс диффузии питательных веществ зависит от характера нагрузки, что, в свою очередь, может приводить к развитию патологических изменений в суставном хряще.

Список литературы

1. Адашевский В.М. Метод определения динамических характеристик тела человека и его элементов в наземных циклических локомоциях // Биомеханика-2004: VII всерос. конф. по биомеханике: тез. докл. – Н. Новгород, 2004. – Т.1. – С. 89.
2. Белов И.А. Использование метода конечных элементов при моделировании костной ткани на основе теории порупругости // Биомеханика-2004: VII всерос. конф. по биомеханике: тез. докл. – Н. Новгород, 2004. – Т. 2. – С. 98.
3. Девликанов Э.О. Компьютерный тахогониограф для оценки подвижности суставов / Э.О. Девликанов, А.А. Марченко, И.И. Максимов // Биомеханика-2004: VII всерос. конф. по биомеханике: тез. докл. – Н. Новгород, 2004. – Т. 2. – С. 106–107.
4. Королев С.Б. Анализ патологической биомеханики в развитии оперативного и восстановительного лечения контрактур и деформаций суставов // Эволюция хирургии крупных суставов: сб. науч. тр. – 2011. – С. 75–77.
5. Левченко Е.Ю. Измерение кинематических параметров движения человека / Е.Ю. Левченко, В.И. Кожевников // Биомеханика-2004: VII всерос. конф. по биомеханике: тез. докл. – Н. Новгород, 2004. – Т. 1. – С. 122–124.
6. Трегубов В.П. Проблемы параметрической идентификации механических моделей человека // VI Всерос. конф. по биомеханике «Биомеханика-2002»: тез. докл. – Н. Новгород, 2002. – С. 28–30.
7. Шерепо К.М. Стендовые испытания демпфирующего эндопротеза / К.М. Шерепо, Н.С. Гаврюшенко // IV всерос. конф. по биомеханике «Биомеханика-98»: тез. докл. – Н. Новгород, 1998. – С. 223.
8. Янсон Х.А. Биомеханика нижней конечности человека // Биомеханика нижней конечности человека. – Рига: Зинанте, 1975. – 324 с.
9. World tribology forum in arthroplasty / ed. by Rieker C., Oberholzer S., Wyss U. – Bern: Hans Huber, 2001. – 332 p.

References

1. Adashevskij V.M. Metod opredelenija dinamičeskikh harakteristik tela čeloveka i ego jelementov v nazemnyh cikličeskikh lokomocijah / V.M. Adashevskij // Biomehanika-2004: VII vseros. konf. po biomehanike: tez. dokl. N. Novgorod, 2004. T. 1. P. 89.
2. Belov I.A. Ispolzovanie metoda konečnyh jelementov pri modelirovanii kostnoj tkani na osnove teorii porouprugosti / I.A. Belov // Biomehanika-2004: VII vseros. konf. po biomehanike: tez. dokl. N. Novgorod, 2004. T. 2. P. 98.

3. Devlikanov J.O. Kompjuternej tahogoniograf dlja ocenki podvizhnosti sustavov / J.O. Devlikanov, A.A. Marchenok, I.I. Maksimov // Biomehanika-2004: VII vseros. konf. po biomehanike: tez. dokl. N. Novgorod, 2004. T. 2. P. 106–107.

4. Korolev S.B. Analiz patologičeskoj biomehaniki v razvitii operativnogo i vosstanovitel'nogo lečeniya kontraktur i deformacij sustavov / S.B. Korolev // Jevoljucija hirurgii krupnyh sustavov: sb. nauch. tr. 2011. P. 75–77.

5. Levchenko E.J. Izmerenie kinematičeskikh parametrov dvizhenija čeloveka / E.J. Levchenko, V.I. Kozhevnikov // Biomehanika-2004: VII vseros. konf. po biomehanike: tez. dokl. N. Novgorod, 2004. T. 1. P. 122–124.

6. Tregubov V.P. Problemy parametriceskoj identifikacii mehaničeskikh modelej čeloveka / V.P. Tregubov // VI vseros. konf. po biomehanike «Biomehanika-2002»: tez. dokl. N. Novgorod, 2002. P. 28–30.

7. Sherepo K.M. Stendovye ispytaniya dempfirujushhego jendoproteza / K.M. Sherepo, N.S. Gavryushenko // IV vseros. konf. po biomehanike «Biomehanika-98»: tez. dokl. N. Novgorod, 1998. P. 223.

8. Janson H.A. Biomehanika nizhnej konečnosti čeloveka / H.A. Janson. Biomehanika nizhnej konečnosti čeloveka. Riga: Zinante, 1975. 324 p.

9. World tribology forum in arthroplasty / ed. by Rieker C., Oberholzer S., Wyss U. Bern: Hans Huber, 2001. 332 p.

Рецензенты:

Малышев Е.С., д.м.н., профессор кафедры хирургии факультета повышения квалификации врачей (курс травматологии и ортопедии), ГБОУ ВПО «НижГМА» Минздрава России, г. Н. Новгород;

Кудыкин М.В., д.м.н., профессор, ФГБУ «ННИИТО» Минздрава России, г. Н. Новгород;

Чалык Ю.В., д.м.н., профессор, кафедра общей хирургии Саратовского государственного медицинского университета, г. Саратов;

Пучиньян Д.М., д.м.н., профессор, зам. директора по науке, ФГБУ «Саратовский научно-исследовательский институт травматологии и ортопедии» Министерства здравоохранения и социального развития Российской Федерации, г. Саратов.

Работа поступила в редакцию 11.07.2013.