

УДК 519.7

## ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Лутманов С.В., Куksenok Л.В., Попова Е.С.

Пермский национальный исследовательский университет, Пермь, e-mail: mpu@psu.ru.

Рассмотрена математическая модель плоского двухзвенного манипулятора с вращательными кинематическими парами в форме уравнений Лагранжа второго рода. В предположении, что начальное положение схвата манипулятора смещено относительно расчетного, поставлены и решены две задачи оптимального управления о возвращении схвата на базовую траекторию. В первой задаче минимизировалась максимальная за все время процесса величина управляющего воздействия. Построено оптимальное в смысле указанного критерия программное управление и проведен анализ оптимального значения критерия в зависимости от времени выхода схвата на базовую траекторию. Во второй задаче допускалось наличие неконтролируемой помехи, которой предписывалось стремление максимально препятствовать выходу схвата на базовую траекторию. Вторая задача по существу представляет собой антагонистическую дифференциальную игру двух лиц, в которой игрок-союзник решает задачу наведения на некоторое целевое множество. Доказано наличие седловой точки в этой игре и построены наилучшие гарантирующие стратегии игроков. Выводы статьи подтверждены численным экспериментом.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, механический манипулятор, дифференциальная игра

## PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL OF THE TWO-LINK MANIPULATOR WITH ROTATIONAL KINEMATIC PAIRS

Lutmanov S.V., Kuksenok L.V., Popova E.S.

Perm State National Research University, Perm, e-mail: mpu@psu.ru

A mathematical model of a two-link flat manipulator with rotational kinematic pairs in the form of Lagrange equations of the second kind is considered. Assuming that the initial position of the manipulator's gripper is displaced relative to estimated, two problems of optimal control about the return a gripper on a basic trajectory are set and solved. In the first problem the maximum for process all the time value of control action was minimized. The programmed optimal in the sense of specified criterion control is constructed and the analysis of optimum value of criterion depending on exit time of a gripper on a basic trajectory is carried out. In the second problem existence of a uncontrolled hindrance was allowed, to which the aspiration as much as possible to interfere with an exit of a gripper on a basic trajectory was recommended. The second problem of a being represents antagonistic differential game of two persons in which the player-ally solves a problem of aiming at some target set. The existence of a saddle point in this game is proved and the best guaranteeing strategies of players are constructed. Conclusions of the article are confirmed by numerical experiment.

**Keywords:** optimal control, mechanical manipulator, differential game

Задачи оптимального управления динамическими объектами являются важными и актуальными. Дифференциальные уравнения движения для таких объектов, как правило, бывают нелинейными, что затрудняет применение известных методов оптимизации, например, принципа максимума Л.С. Понтрягина. В статье рассматривается задача о возвращении схвата двухзвенного манипулятора на базовую траекторию. Для ее решения уравнения движения схвата были линеаризованы в окрестности этой траектории, что позволило свести задачу управления к функциональной проблеме моментов и решить ее. Кроме того, удалось расширить задачу управления до игровой и построить наилучшую гарантирующую позиционную стратегию игрока – союзника, позволяющую преодолеть самые неблагоприятные действия неконтролируемой помехи. Управления, полученные в линеаризованной модели, были применены и для исходной модели. Численный эксперимент показал приемлемость такого подхода.

### 1. Математическая модель манипулятор

На горизонтальной плоскости рассмотрим двухзвенный механический манипулятор с двумя вращательными парами (рис. 1). Каждое звено манипулятора представляет собой абсолютно жесткий однородный стержень длины  $l$ . Первое звено соединено с неподвижным основанием вращательной парой  $O_1$ , а со вторым звеном – вращательной парой  $O_2$ . Принимается, что масса схвата равна  $m$ , а масса  $i$ -го звена –  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ . В соединительных парах могут развиваться управляющие моменты  $w_i$ ,  $i = 1, 2$ . Трение в шарнирах отсутствует. В статьях [1], [5] были выведены дифференциальные уравнения движения данного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода, в которых в качестве обобщенных координат взяты углы  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Вид этих уравнений приводится ниже

$$\dot{q}_1 = q_3;$$

$$\dot{q}_2 = q_4;$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} \frac{2bw_1 - 2bcq_4^2 \sin(q_1 - q_2) - 2cw_2 \cos(q_1 - q_2) - c^2 q_3^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}; \quad (1.1)$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2} \frac{2aw_2 + 2acq_3^2 \sin(q_1 - q_2) - 2cw_1 \cos(q_1 - q_2) + c^2 q_4^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}.$$

Здесь

$$a = \frac{1}{4} \left( \frac{4}{3} m_1 + 4m_2 + 4m \right) l^2;$$

$$b = \frac{1}{4} \left( \frac{4}{3} m_2 + 4m \right) l^2;$$

$$c = \frac{1}{2} (2m + m_2) l^2;$$

$$q_1 = \varphi_1; \quad q_2 = \varphi_2;$$

$$q_3 = \dot{\varphi}_1; \quad q_4 = \dot{\varphi}_2.$$

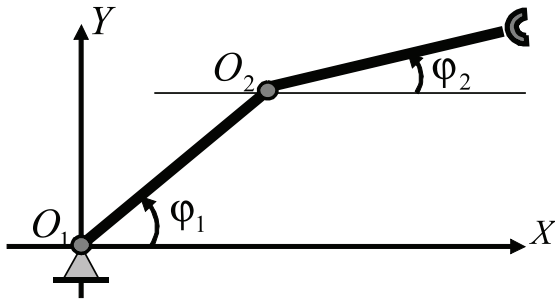


Рис. 1. Двухзвенный манипулятор

Связь между декартовыми координатами схвата и обобщенными координатами манипулятора осуществляется по формулам

$$X = l(\cos q_1 + \cos q_2);$$

$$Y = l(\sin q_1 + \sin q_2). \quad (1.2)$$

Заданы:  $t_0$  – начальный и  $T$  – конечный моменты времени процесса,  $(X_0, Y_0)$  – исходное и  $(X_T, Y_T)$  – конечное положение схвата,  $Y = f(X)$  – уравнение траектории схвата,  $(\hat{X}(\cdot), \hat{Y}(\cdot))$  – базовый закон изменения декартовых координат схвата в функции

времени, обеспечивающий его переход из начального положения в конечное вдоль траектории  $Y = f(X)$  с нулевыми начальной и конечной скоростями. Для определения программных управлений  $\hat{w}_1(\cdot), \hat{w}_2(\cdot)$ , реализующих базовый закон движения схвата, следует обратить соотношения (1.2) и, подставив в полученные зависимости закон движения  $(\hat{X}(\cdot), \hat{Y}(\cdot))$ , найти соответствующий ему закон изменения обобщенных координат  $(\hat{q}_1(\cdot), \hat{q}_2(\cdot))$ . Управления  $\hat{w}_1(\cdot), \hat{w}_2(\cdot)$  легко определяются из соотношений (1.1), если положить в них

$$q_1(t) = \hat{q}_1(t);$$

$$q_2(t) = \hat{q}_2(t);$$

$$q_3(t) = \dot{\hat{q}}_1(t);$$

$$q_4(t) = \dot{\hat{q}}_2(t).$$

Таким образом, управления также считаем заданными.

## 2. Постановка задачи управления.

Пусть по какой-либо причине в начальный момент времени схват не находится строго на заданной траектории. Тогда управления  $\hat{w}_1(\cdot), \hat{w}_2(\cdot)$  не обеспечат для него базовый закон движения  $(\hat{X}(\cdot), \hat{Y}(\cdot))$  и, в частности, движение вдоль траектории  $Y = f(X)$  с остановкой в конечный момент времени  $T$ . Допустим, что в каждой из вращательных пар могут развиваться дополнительные управляющие моменты  $u_1, u_2$  соответственно. Тогда дифференциальные уравнения движения манипулятора запишутся в виде

$$\dot{q}_1 = q_3; \quad \dot{q}_2 = q_4;$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} \frac{2b(\hat{w}_1(t) + u_1) - 2bcq_4^2 \sin(q_1 - q_2) - 2c(\hat{w}_2(t) + u_2) \cos(q_1 - q_2) - c^2 q_3^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}; \quad (2.1)$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2} \frac{2a(\hat{w}_2(t) + u_2) + 2acq_3^2 \sin(q_1 - q_2) - 2c(\hat{w}_1(t) + u_1) \cos(q_1 - q_2) + c^2 q_4^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}.$$

Требуется подобрать моменты  $u_1, u_2$  в виде интегрируемых функций времени, возвращающие схват на заданный закон движения в момент времени  $\vartheta \in [t_0, T]$  и доставляющие минимум критерию качества

$$I[u(\cdot)] = \max_{\tau \in [t_0, \vartheta]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)}.$$

По терминологии книги [2], этот критерий носит название «минимум силы».

Сформулируем проблему как задачу теории оптимального управления. Пусть  $(X_0, Y_0)$  – начальное положение схвата, не принадлежащее заданной траектории,  $(q_{10}, q_{20})$  – отвечающие ему обобщенные координаты, и  $u: [t_0, \vartheta] \rightarrow R^2$  – некоторая интегрируемая вектор-функция. Символом  $q(\cdot, q_{10}, q_{20}, u(\cdot))$  обозначим соответствующее решение системы дифференциальных уравнений (2.1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} q_1(t_0) &= q_{10}; & q_2(t_0) &= q_{20}; \\ q_3(t_0) &= 0; & q_4(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

$$\dot{q}_1 = q_3; \quad \dot{q}_2 = q_4;$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} \frac{2b(\hat{w}_1(t) + u_1 + v_1) - 2bcq_4^2 \sin(q_1 - q_2) - 2c(\hat{w}_2(t) + u_2 + v_2) \cos(q_1 - q_2) - c^2 q_3^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}, \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} \frac{2a(\hat{w}_2(t) + u_2 + v_2) + 2acq_3^2 \sin(q_1 - q_2) - 2c(\hat{w}_1(t) + u_1 + v_1) \cos(q_1 - q_2) + c^2 q_4^2 \sin[2(q_1 - q_2)]}{ab - c^2 \cos^2(q_1 - q_2)}. \end{aligned}$$

В этой игре «игрок-союзник» осуществляет управление объектом в классе позиционных стратегий  $u: [t_0, \vartheta] \times R^4 \rightarrow P$ , опираясь на информацию только о реализовавшемся в данный момент времени фазовом векторе игры. «Игрок – противник» может применять любые интегрируемые

**Задача 1.** Среди интегрируемых вектор функций  $u: [t_0, T] \rightarrow R^2$ , удовлетворяющих условию

$$q_i(\vartheta, q_{10}, q_{20}, u(\cdot)) = \hat{q}_i(\vartheta), \quad i = 1, \dots, 4,$$

найти ту, для которой величина  $I[u(\cdot)]$  достигает наименьшего значения.

Усложним модель. Предположим, что в соединительных парах могут развиваться неконтролируемые помехи в виде вращательных моментов  $v_1, v_2$ . Неконтролируемой помехе предписывается стремление максимально навредить в решении задачи перевода схвата на базовую траекторию. В данной модели конфликтно-управляемого динамического объекта на дополнительные управления  $u_1, u_2$  и неконтролируемые помехи  $v_1, v_2$  наложены геометрические ограничения в форме включений

$$(u_1, u_2) \in P = \{u \in R^2 \mid \|u\| \leq \alpha\};$$

$$(v_1, v_2) \in Q = \{v \in R^2 \mid \|v\| \leq \beta\}, \quad \alpha > \beta.$$

Рассматриваемую ситуацию будем трактовать как антагонистическую дифференциальную игру двух лиц, динамика которой описывается дифференциальными уравнениями

реализации вектора своих управляющих параметров  $v: [t_0, \vartheta] \rightarrow Q$ .

### 3. Линеаризованные уравнения движения

Полагаем

$$x_i(\cdot) = q_i(\cdot, q_{10}, q_{20}, u(\cdot)) - \hat{q}_i(\cdot), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.1)$$

Тогда условие возвращения схвата на базовый закон движения в момент времени  $\vartheta$  принимает вид  $x_i(\vartheta) = 0, i = 1, \dots, 4$ . Измене-

ние во времени величин (3.1) в условиях задачи 1 приближенно описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{pmatrix}^T = A(t) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T + B(t) \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T, \quad (3.2)$$

а в условиях дифференциальной игры – уравнением

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{pmatrix}^T = A(t) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T + B(t) \begin{pmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{pmatrix}^T. \quad (3.3)$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_4} \\ \frac{\partial Q_4}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_4}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_4}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_4}{\partial q_4} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_3}{\partial w_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial w_2} \\ \frac{\partial Q_4}{\partial w_1} & \frac{\partial Q_4}{\partial w_2} \end{pmatrix},$$

$Q_3, Q_4$  – правые части третьего и четвертого дифференциального уравнения в (1.1) соответственно. Аппроксимируем задачу 1.

**Задача 2.** Среди интегрируемых вектор функций  $u : [t_0, T] \rightarrow R^2$ , удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} x_i(\vartheta, x_{10}, x_{20}, u(\cdot)) &= 0; \\ x_{10} &= q_{10} - \hat{q}_1(t_0); \\ x_{20} &= q_{20} - \hat{q}_2(t_0), \quad i=1, \dots, 4, \end{aligned}$$

где  $x(\cdot, x_{10}, x_{20}, u(\cdot))$  – соответствующее решение системы (3.2) с начальными условиями  $(x_{10}, x_{20}, 0, 0)$ , найти ту, для которой величина  $I[u(\cdot)]$  достигает наименьшего значения.

Аналогично исходную дифференциальную игру аппроксимируем линейной антагонистической дифференциальной игрой двух лиц, динамика которой описывается уравнением (3.3), цель первого игрока-со-

юзника – привести фазовый вектор игры  $x(\cdot)$  в начало координат в момент времени  $\vartheta$ , а второго игрока – максимально этому противодействовать.

**4. Решение задачи 2**

Решение задачи 2 осуществим методом сведения ее к функциональной проблеме моментов [2]. Пусть  $X[t, \tau], t, \tau \in [t_0, \vartheta]$  фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения  $\dot{x} = A(tx)$ . Полагаем  $H[\vartheta, \tau] = X[\vartheta, \tau]B(\tau), \tau \in [t_0, \vartheta], c = -X[\vartheta, t_0]x_0, \{l \in R^4 | \langle l, 1 \rangle = c\}$ . Символом  $h^{[k]}(\cdot), k = 1, \dots, 4$  обозначим  $k$ -ю строку матрицы  $H[\vartheta, \tau]$ . Оптимальное управление  $u^0(\cdot)$ , решающее задачу 2, вычисляется по формуле [2]

$$u^0(\cdot) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\cdot)}{\sqrt{\langle h^0(\cdot), h^0(\cdot) \rangle}};$$

$$\rho^0 = \int_{t_0}^{\vartheta} \sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle} d\tau,$$

где  $h^0(\cdot) = \sum_{k=1}^4 l^0_k h^{(k)}(\cdot)$ , а вектор  $l^0$  – решение задачи математического программирования

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{i,j=1}^4 \sqrt{\langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle} l_i l_j d\tau \rightarrow \min, \quad l \in L.$$

**5. Решение дифференциальной игры**

Аппроксимирующая дифференциальная игра является линейной дифференциальной игрой «наведения-уклонения в момент времени  $\vartheta$  на целевое множество  $M = \{0\} \subset R^4$ », в которой выполнены условия однотипности. Тогда в этой игре существует [3] седловая точка в классе позиционных стратегий. Приведем основные моменты ее построения. Полагаем

$$\varepsilon^0(t, x) = \max_{\|l\|=1} \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \kappa(t, x, l) \right\}, \quad t \in [t_0, \vartheta], x \in R^4; \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \kappa(t, x, l) &= \langle l, X[\vartheta, t]x \rangle + \int_t^{\vartheta} \left( \min_{u \in P} \langle l, X[\vartheta, \tau]B(\tau)u \rangle + \max_{v \in Q} \langle l, Z[\vartheta, \tau]B(\tau)v \rangle \right) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^4 f_i(t, x) l_i + \int_t^{\vartheta} \left[ \min_{u \in P} \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\tau, l_1, l_2, l_3, l_4) u_i + \max_{v \in Q} \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\tau, l_1, l_2, l_3, l_4) v_i \right] d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим через  $l^0(t, x)$  вектор, на котором достигается максимум в (5.1). В силу однотипности объектов он единственен,

если  $\varepsilon^0(t, x) > 0$ . Пара позиционных стратегий  $u^e, v^e$ , реализующих седловую точку в игре, определяется формулами

$$u^e(t, x) = \begin{cases} -\alpha R(t, l^0(t, x)), & \varepsilon^0(t, x) > 0, \\ \forall u \in P & \varepsilon^0(t, x) = 0, \end{cases}$$

$$v^e(t, x) = \begin{cases} \beta R(t, l^0(t, x)), & \varepsilon^0(t, x) > 0, \\ \forall v \in Q & \varepsilon^0(t, x) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$R(t, l) = \left( \frac{\varphi_1(t, l)}{\sqrt{\varphi_1^2(t, l) + \varphi_2^2(t, l)}} \quad \frac{\varphi_2(t, l)}{\sqrt{\varphi_1^2(t, l) + \varphi_2^2(t, l)}} \right)^T. \quad (5.3)$$

Позиционные управления  $u^e[\cdot], v^e[\cdot]$  не являются непрерывными, поэтому игру следует формализовать в классе конструктивных движений Н.Н. Красовского (пошаговые равномерные пределы ломаных Эйлера) [3], [4]. Позиционное управление  $u^e[\cdot]$  «игрока-союзника» обеспечивает выход схвата манипулятора на базовый закон движения в момент времени  $\vartheta$  при любых действиях помехи, если  $\varepsilon^0(t_0, x_0) = 0$ . Опишем процедуру управления нелинейным объектом (2.2) на базе оптимальных стратегий, решающих аппроксимирующую линейную дифференциальную игру. Промежуток времени  $[t_0, \vartheta]$  разбиваем на полуинтервалы

$$[\tau_i, \tau_{i+1}), \tau_{i+1} - \tau_i = \delta > 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_{n+1} = \vartheta.$$

На каждом из полуинтервалов оптимальные управления игроков определяются из условия

$$u^e(\tau_i, x_i) = \text{const};$$

$$v^e(\tau_i, x_i) = \text{const};$$

$$x_i = q(\tau_i, q_{10}, q_{20}, u^e(\tau_{i-1}, x_{i-1}),$$

$$v^e(\tau_{i-1}, x_{i-1})) - \hat{q}(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Зависимость величины критерия от длины промежутка времени управления

| $\vartheta, \text{с}$                 | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1,0  |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| $I[u(\cdot)] \text{Н} \cdot \text{м}$ | 96,82 | 23,71 | 10,19 | 5,49 | 3,35 | 2,22 | 1,56 | 1,15 | 0,87 | 0,67 |

Из таблицы следует, что чем меньше времени дается на выход движения схвата на базовую траекторию, тем больше силовые затраты на управление. Эффективность найденного дополнительного программного управления проверяется путем подстановки его в исходные нелинейные дифференциальные уравнения движения и интегрирования их с выбранными смещенными начальными условиями. Численно показано, что в результате схват в момент времени  $\vartheta$  выходит на базовую траекторию и продол-

жает движение вдоль нее после выключения дополнительных управлений. На рис. 2 приводится траектория движения схвата манипулятора для случая  $\vartheta = 0,5$ .

## 6. Численный эксперимент

Зададимся следующими массово-геометрическими характеристиками манипулятора:  $m = m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ ,  $l_1 = l_2 = 1 \text{ м}$ . Принимаем, что  $t_0 = 0$ ,  $T = 1 \text{ с}$ . При решении задачи 1 полагаем

$$(X_0, Y_0) = (1,5 \text{ м}; 1,02 \text{ м}),$$

$$(X_T, Y_T) = (0,25 \text{ м}; 1,24 \text{ м}),$$

$$Y = \frac{1}{4} \cos X + 1.$$

Тогда

$$x_1(0) = 10,21 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

$$x_2(0) = 5,31 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

$$x_3(0) = 0 \text{ рад/с}; \quad x_4(0) = 0 \text{ рад/с}.$$

Задача вывода схвата на исходную траекторию была решена для десяти значений момента времени  $\vartheta \in [0, 1; 1]$ . Оптимальное значение критерия «минимум силы» для каждого из этих моментов времени приведено в таблице.

В случае игровой задачи принимается, что

$$\alpha = 10, \quad \beta = 1, \quad \vartheta = 0,5,$$

$$(X_0, Y_0) = (1,5 \text{ м}; 0,38 \text{ м})$$

$$(X_T, Y_T) = (0,5 \text{ м}; 1,38 \text{ м}),$$

$$Y = -\frac{1}{2} X^2 + 1,5.$$

Тогда  $x_1(0) = -0,21$  рад,  $x_2(0) = -0,40$  рад,  $x_3(0) = 0$  рад/с,  $x_4(0) = 0$  рад/с. Численный эксперимент показал, что для нелинейного объекта сохраняется аналог седловой точки, имеющей место в аппроксимирующей линейной игре. В частности, было установлено (с точностью до третьего знака, когда  $\delta = 0,01$ ) совпадение цены игры с величиной гипотетического рассогласования  $\varepsilon^0$ , постоянство функции  $\varepsilon^0$  вдоль движения, порожденного оптимальными управлениями, ее монотонное убывание, если второй игрок

единолично уклоняется от оптимального управления и монотонное возрастание, если единолично уклоняется первый игрок. Соответствующие графики приведены на рис. 3. Из равенства  $\varepsilon(t_0, x_0) = 0$  следует, что даже при самой неблагоприятной реализации помехи схват можно вернуть на базовую траекторию в момент времени  $\vartheta$ , если пользоваться оптимальной стратегией первого игрока. Показано также, что единоличное уклонение игрока от оптимальной стратегии приводит к ухудшению его результата в игре.

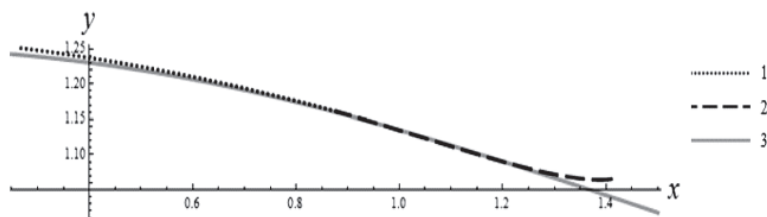


Рис. 2. Траектория движения схвата:  
1 – движение схвата после его возвращения на базовую траекторию; 2 – траектория схвата, отвечающая времени перевода  $\vartheta = 0,5$ ; 3 – базовая траектория движения схвата

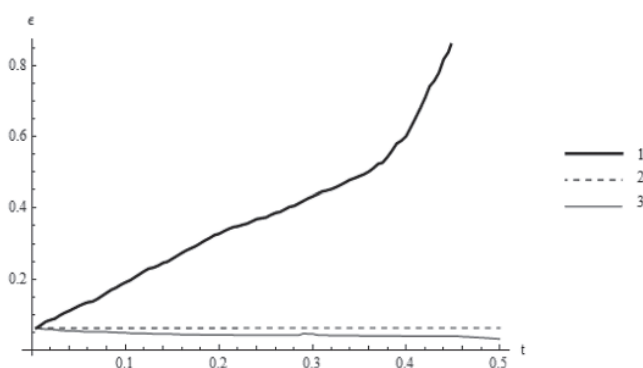


Рис. 3. График функции  $\varepsilon(t)$ :  
1 – при единоличном уклонении первого игрока; 2 – при оптимальных управлениях;  
3 – при единоличном уклонении второго игрока

**Список литературы**

1. Андрюкова А.А., Лутманов С.В. Математическая модель игрового управления движением плоского двухзвенного манипулятора // Проблемы механики и управления. – 2007. – Вып. 39. – С. 14–26.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985. – 520 с.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1973. – 456 с.
5. Кулагин Е.В., Лутманов С.В., Петухов И.С. Математическое моделирование управления движением плоского двухзвенного манипулятора. // Проблемы механики и управления. – 2005. – Вып. 37. – С. 21–34.

**References**

1. Andriukova A.A., Lutmanov S.V. Problemy mehaniki i upravlenija. 2007, no. 39, pp. 14–26.
2. Krasovskij N.N. Upravlenie dinamicheskoy sistemoy. Moscow, Nauka, 1985. 221 p.

3. Krasovskij N.N. Teorija upravlenija dvizheniem. Moscow, Nauka, 1968. 476 p.
4. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. Pozicionnye differencial'nye igry. Moscow, Nauka, 1973. 456 p.
5. Kulagin E.V., Lutmanov S.V. Petuhov I.S. Problemy mehaniki i upravlenija. 2005, no. 37, pp. 21–34.

**Рецензенты:**

Яковлев В.И., д.ф.-м.н., профессор, декан механико-математического факультета, зав. кафедрой процессов управления и информационной безопасности, Пермский национальный исследовательский университет, г. Пермь;

Галкин В.Д., д.т.н., профессор, декан инженерного факультета, Пермская государственная сельскохозяйственная академия им. академика Д.Н. Прянишникова, г. Пермь.

Работа поступила в редакцию 07.05.2013.