

УДК 624.131.25

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСТВОРЕНИЯ И ВЫНОСА СОЛЕЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОДАХ

Магомедова А.В., Иванов В.В.

ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет»,
Махачкала, e-mail: dstu@dstu.ru

В статье рассматривается численное решение уравнений растворения и выноса солей при фильтрации в трещиноватых породах. Решена краевая задача двумерной конвективной диффузии разностным методом. Решение позволяет прогнозировать растворение и вынос солей в основаниях гидротехнических сооружений. Приведен алгоритм решения краевой задачи двумерной конвективной диффузии в прямоугольной области и приведены численные результаты расчета распределений концентраций раствора в заполненной трещине. По приведенному алгоритму для вычисления распределения концентраций по трещине составлена и отлажена программа на языке TPascal 7.1. Для оценки интенсивности раскрытия трещины при растворении ее стенок рассмотрены средние по длине трещины приращения раскрытия и получены соответствующие выражения. Приведенные приемы позволяют приближенно учесть изменение размеров трещины в процессе растворения.

Ключевые слова: фильтрация, трещина, растворение солей, конвективная диффузия, порода, гидротехнические сооружения

NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF DISSOLUTION AND REMOVAL OF SALTS IN THE FILTERING IN FRACTURED ROCKS

Magomedova A.V., Ivanov V.V.

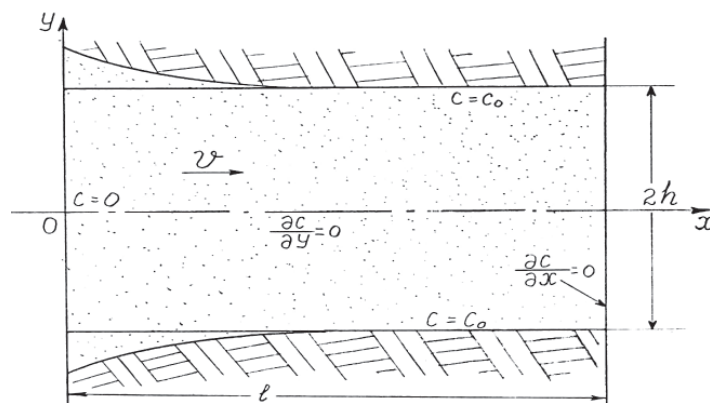
Dagestan state technical University, Makhachkala, e-mail: dstu@dstu.ru

In the article we consider the numerical solution of the equations of dissolution and removal of salts in the filtering in fractured rocks. Solved boundary value problem of two-dimensional convective diffusion difference method. The solution allows to predict the dissolution and removal of salts in the grounds of the hydrotechnical facilities. The algorithm for solving the boundary value problem of two-dimensional convective diffusion in a rectangular area, and the numerical results of calculating the distribution of concentrations of the solution in the crack. On the algorithm used to determine the distribution of concentrations of crack is compiled and debugged program in the language of TPascal 7.1. To assess the intensity of the crack opening upon the dissolution of its walls is considered average increment of the crack length disclosure and received the appropriate expression. The given technique allows to approximately take into account the change of the sizes cracks in the process of dissolving.

Keywords: filtering, crack, the dissolution of salts, convective diffusion, breed, hydraulic engineering constructions

При движении воды по трещинам пород, содержащих растворимые включения, происходит увеличение раскрытия трещин за счет растворения их стенок. Процесс выноса солей включает как диффузионный транспорт их от поверхности растворения, так и конвективный перенос фильтрующимся потоком. Рассмотрим процесс для наиболее простой схемы одиночной заполненной дисперсным материалом трещины длиной l и шириной

$2h$; скорость фильтрации считается постоянной и равной v (рисунок). Такого рода задача была исследована А.Н. Патрашевым [5] для условий стационарной диффузии и при пренебрежении диффузионным переносом в направлении конвекции. Считалось также, что коэффициент диффузии одинаков по всем направлениям. Следующее аналитическое решение, свободное от указанных допущений, приведено в работе [2].



Расчетная схема растворения заполненной трещины

В связи с тем, что $v = \text{const}$, коэффициенты продольной и поперечной конвективной диффузии D_1 и D_2 также будут постоянными, но различными по величине. Процесс растворения и выноса солей из трещины в таких условиях будет описываться уравнением нестационарной конвективной диффузии в прямоугольной области $0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 2h$:

$$D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} = n_0 \frac{\partial C}{\partial t} \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$C(x, y, 0) = C(x, 0, t) = C_0; \quad (2)$$

$$C(0, y, t) = \partial C(l, y, t) / \partial x = 0; \quad (3)$$

$$\partial C(x, h, t) / \partial y = 0. \quad (4)$$

Применяя к (1) интегральное преобразование Лапласа по переменной t с учетом начального условия (2), получим

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} - v \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - n_0 p \left(\bar{c} - \frac{c_0}{p} \right) = 0, \quad (5)$$

причем

$$\bar{c}(x, y, p) = \int_0^\infty c(x, y, t) e^{-pt} dt,$$

где p – параметр преобразования.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{v}{D_1} \frac{du}{dx} - \frac{n_0}{D_1} \left(p + \frac{D_2}{h_0} \lambda_n^2 \right) \left(u - \frac{c_0}{p \lambda_n} \right) = 0. \quad (9)$$

Это уравнение должно решаться при граничных условиях

$$u(0, \lambda_n, p) = u(l, \lambda_n, p) = 0. \quad (10)$$

Представим общее решение (9) в виде

$$u - \frac{c_0}{p \lambda_n} = A_1 e^{\eta_1 x} + A_2 e^{-\eta_2 x}, \quad (11)$$

где

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{4n_0}{D_1} \left(p + \frac{D_2}{n_0} \lambda_n^2 \right) + \frac{v^2}{D_1^2}} \pm \frac{v}{D_1} \right].$$

$$u = \frac{c_0}{p \lambda_n} \left[1 - e^{-v(l-x)/2D_1} \frac{\text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} x}{\text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} l} - e^{vx/2D_1} \frac{\text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} (l-x)}{\text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} l} \right], \quad (12)$$

$$\text{где } a = \frac{D_2}{n_0} \lambda_n^2 + \frac{v^2}{4D_1 n_0}.$$

Обратный переход к функции с осуществляется по формуле обращения

$$\bar{c}(x, y, p) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} u(\lambda_n) \sin \lambda_n y.$$

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{12}{p} - \frac{e^{vx/2D_1}}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[e^{-v(l-x)/2D_1} \text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} x + \text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} (l-x) \right] \sin \lambda_n y}{p \lambda_n \text{sh} \sqrt{n_0(p+a)/D_1} l}. \quad (13)$$

Граничные условия (2)–(4) также могут быть представлены в форме изображений:

$$\bar{c}(0, y, p) = \bar{c}(l, y, p) = 0; \quad (6)$$

$$\bar{c}(x, 0, p) = c_0 / p; \quad (7)$$

$$\partial \bar{c}(x, h, p) / \partial y = 0.$$

Дальнейшее упрощение хода решения задачи может быть достигнуто путем использования конечного синус-преобразования Фурье по переменной y в форме

$$u(x, \lambda_n, p) = \int_0^h u(\xi) \sin \lambda_n \xi d\xi.$$

При этом параметр преобразования может принимать ряд значений, определяемых из уравнения $\cos \lambda_n h = 0$, т. е.

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{h} \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Определив изображения постоянной $n_0 c_0 \dots n_0 c_0 / \lambda_n$ и второй производной $\partial^2 \bar{c} / \partial y^2 \dots - \lambda_n^2 u(\lambda_n) + c_0 \lambda_n / p$, включающие граничные условия (6), получим следующее одномерное уравнение для $u(x, \lambda_n, p)$:

Подстановка (11) в условия (10) позволяет определить постоянные

$$A_1 = -\frac{c_0}{p \lambda_n} \frac{1 - e^{-\eta_2 l}}{e^{\eta_1 l} - e^{-\eta_2 l}};$$

$$A_2 = \frac{c_0}{p \lambda_n} \frac{1 - e^{-\eta_1 l}}{e^{\eta_1 l} - e^{-\eta_2 l}}.$$

С учетом этих значений постоянных частное решение (9) записывается в виде

Имея в виду, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n y}{\lambda_n} = \frac{h}{2},$$

получим

Переход к оригиналу в последнем выражении производится по теореме разложения, что дает окончательное выражение

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} = 1 - \frac{2}{h^0} e^{\xi x^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\text{shv}_n x^0 e^{-\xi} + \text{shv}_n (1-x^0)] \sin \zeta_n h^0 y^0}{\zeta_n \text{shv}_n} - \\ - \frac{4}{h^0} e^{\xi x^0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \mu_k [\sin \mu_k x^0 e + \sin \mu_k (1-x^0)] \sin \zeta_n h^0 y^0}{\zeta_n (\mu_n^2 + \nu_n^2)} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} (\mu_k^2 + \nu_n^2) \frac{\vartheta}{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{2n-1}{2h^0} \pi; \quad \nu_n = \sqrt{D^0 \zeta_n^2 + \xi}; \\ \mu_k &= k\pi; \quad h^0 = h/l; \\ x^0 &= x/l; \quad y^0 = y/h; \end{aligned}$$

$$D^0 = D_2/D_1; \quad \xi = \nu l/2D_1$$

– критерий Пекле; $\vartheta = \nu l/n_0$ – критерий Струхала или кратность обмена жидкости в трещине.

В этих обозначениях перепишем уравнение (1) в следующем виде [1]

$$\frac{D_1}{l^2} \frac{\partial^2 (C/C_0)}{\partial (x/l)^2} + \frac{D_2}{h^2} \frac{\partial^2 (C/C_0)}{\partial (y/h)^2} + \frac{\nu}{l} \frac{\partial (C/C_0)}{\partial (x/l)} = \frac{n_0}{t_0} \frac{\partial (C/C_0)}{\partial (t/t_0)}. \quad (15)$$

Умножая обе части уравнения (15) на l^2/D_1 , получим

$$\frac{\partial^2 C}{\partial (x^0)^2} + \frac{D_2}{D_1} \frac{l^2}{h^2} \frac{\partial^2 C}{\partial (y^0)^2} - \frac{l\nu}{D_1} \frac{\partial C}{\partial x^0} = \frac{l^2 n_0}{D_1 t_0} \frac{\partial C}{\partial T}$$

или

$$\frac{\partial^2 C}{\partial (x^0)^2} + \frac{D^0 l^2}{h^2} \frac{\partial^2 C}{\partial (y^0)^2} - 2\xi_1 \frac{\partial C}{\partial x^0} = \delta \frac{\partial C}{\partial T}, \quad (16)$$

где $\delta = n_0 l^2 / D_1 t_0$; $C = C/C_0$.

Для получения стационарного распределения концентраций в трещине уравнение (16) решаем разностным методом, называемым продольно-поперечной разностной схемой. В этой схеме переход от слоя n к слою $n+1$ осуществляется в два этапа. На первом этапе определяют промежуточные значения $y_{ij}^{n+0,5}$ из системы уравнений

$$\frac{\delta (Y_{ij}^{n+0,5} - Y_{ij}^n)}{0,5\tau} = L_1 Y_{ij}^{n+0,5} - 2\xi L_{11} Y_{ij}^{n+0,5} + \frac{D^0}{h_0^2} L_2 Y_{ij}^n, \quad (17)$$

а на втором этапе, пользуясь найденными значениями Y_{ij} , находят Y_{ij}^{n+1} из системы уравнений

$$\frac{\delta (Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^{n+0,5})}{0,5\tau} = L_1 Y_{ij}^{n+0,5} - 2\xi L_{11} Y_{ij}^{n+0,5} + \frac{D^0}{h_0^2} L_2 Y_{ij}^{n+1}. \quad (18)$$

Алгоритм решения уравнений (17) и (18). Перепишем уравнение (17) в виде

$$f \cdot Y_{i-1,j}^{n+0,5} - \gamma \cdot Y_{ij}^{n+0,5} + \beta \cdot Y_{i+1,j}^{n+0,5} = -F_{1ij}, \quad (19)$$

где

$$f = 0,5\tau / h_1^2;$$

$$\gamma = \tau / h_1^2 + \tau \cdot \xi / h_1 + \delta;$$

$$\beta = 0,5\tau / h_1^2 - \xi \cdot \tau / h_1;$$

$$F_{1ij} = \delta \cdot Y_{ij}^n - \frac{0,5\tau D^0}{h_0^2} L_2 Y_{ij}^n.$$

Уравнение (19) решается при каждом фиксированном $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ методом прогонки по переменному i . Чтобы применить прогонку, надо знать граничные значения $Y_{0j}^{n+0,5}$, $Y_{N1j}^{n+0,5}$. В данном случае $Y_{0j}^{n+0,5} = 0$, $Y_{N1j}^{n+0,5} = 0$. После того как все $Y_{ij}^{n+0,5}$ найдены, решается уравнение (18).

Переписывая это уравнение подробнее:

$$f_1 \cdot Y_{ij}^{n+1} - \gamma_1 \cdot Y_{ij}^{n+1} + f_1 \cdot Y_{i,j+1}^{n+1} = -F_{2ij}, \quad (20)$$

где

$$f_1 = \frac{D_0}{h_0^2} \frac{0,5\tau}{h_2^2};$$

$$\gamma_1 = \frac{\tau}{h_2^2} \frac{D^0}{h_0^2} + \delta;$$

$$F_{2ij} = \delta Y_{ij}^{n+0,5} + L_1 Y_{ij}^{n+0,5} + 2\xi L_{11} Y_{ij}^{n+0,5},$$

видим, что при каждом фиксированном $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ его можно решить с помо-

щью одномерной прогонки. Граничные условия в данной задаче $Y_{i0}^{n+1} = 1$, $Y_{i,N_2}^{n+1} = Y_{i,N_2-1}^{n+1}$. По приведенному алгоритму для определения распределения концентраций по трещине составлена и отлажена программа на языке TPascal 7.1.

В таблице приведены численные результаты расчета распределений концентраций раствора в заполненной трещине по указанной программе в сопоставлении с численными результатами, полученными по методу А.С. Малышева.

Распределение концентраций раствора в заполненной трещине при $h^0 = 0,1$, $D^0 = 0,1$, $\xi = 1$

$y_0 \backslash x_0$	По методу А.С. Малышева						По предлагаемому методу					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	
0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0		0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
0,2	0,0	0,896	0,935	0,927	0,831		0,0	0,795	0,943	0,891	0,827	
0,4	0,0	0,658	0,857	0,869	0,695		0,0	0,646	0,866	0,786	0,712	
0,6	0,0	0,591	0,805	0,810	0,603		0,0	0,614	0,794	0,715	0,660	

Сравнительный анализ численных результатов показывает удовлетворительное соответствие между полученными численными результатами по приведенной программе и результатами, полученными по методу А.С. Малышева.

Стационарное распределение концентраций в трещине (при $\vartheta \rightarrow \infty$) определяется зависимостью (14) без последнего члена [2].

В тех случаях, когда скорость фильтрации v значительна, коэффициент конвективной диффузии может определяться из

соотношения $D_{1,2} = \lambda_{1,2} v$. Критерий Пекле, в свою очередь, может быть представлен в виде $\xi = l/2\lambda_1$. Так как параметр λ_1 по величине близок к среднему размеру зерен заполнителя трещины, представляет интерес получение зависимостей, пригодных при больших значениях критерия Пекле ($\xi \geq 10$). Оценивая для этого аргумент гиперболических функций в (13), найдем, что в области $0,1 < x^0 < 0,9$ с незначительной погрешностью можно принимать $\text{sh}z = e^z/2$. Тогда (13) упрощается и имеет вид

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{12}{p} - \frac{e^{-v(l-x)/2D_1}}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\sqrt{n_0(p+a)/D_1}(l-x)\right]}{p\lambda_n} \sin \lambda_n y -$$

$$-\frac{2}{h} e^{vx/2D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\sqrt{n_0(p+a)/D_1}x\right]}{p\lambda_n} \sin \lambda_n y. \quad (21)$$

Переход к оригиналу и введение принятых безразмерных величин дает следующую зависимость для распределения

концентраций при больших значениях критерия Пекле ($\xi \geq 10$).

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{1}{h^0} e^{-\xi(1-x^0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\xi(1-x^0)v_n} \text{erfc}\phi_1 + e^{\xi(1-x^0)v_n} \text{erfc}\phi_2 \right] \sin \zeta_n h^0 y -$$

$$-\frac{1}{h^0} e^{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-x^0 v_n} \text{erfc}\psi_1 + e^{x^0 v_n} \text{erfc}\psi_2 \right] \sin \zeta_n h^0 y. \quad (22)$$

Здесь

$$\phi_{1,2} = \frac{(1-x^0) \mp 2v_n \tau}{2\sqrt{\tau}};$$

$$\psi_{1,2} = \frac{x^0 \mp 2v_n \tau}{2\sqrt{\tau}}; \quad \tau = \frac{D_1 t}{l^2 n_0} = \frac{\vartheta}{2\xi}$$

– диффузионный критерий Фурье.

Из выражений (14) и (22) можно определить диффузионный поток солей от растворяющейся стенки трещины и, следовательно, приращение раскрытия трещины 2δ в любом ее сечении на некоторый момент времени t . Очевидно, что

$$\delta(x, t) = -\frac{D_2}{\zeta \gamma_0} \int_0^t \frac{\partial c(x, 0, t)}{\partial y} dt. \quad (23)$$

Подставляя (14) в (23), получим после некоторых преобразований следующую зависимость для δ :

$$\delta = \frac{2c_0 D^0}{\gamma h^0} \left\{ \tau e^{\xi x^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh} v_n x^0 e^{-\xi} + \text{sh} v_n (1 - x^0)}{\text{sh} v_n} - 4e^{\xi x^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \mu_k [\sin \mu_k x^0 e^{-\xi} + \sin \mu_k (1 - x^0)]}{(\mu_n^2 + v_n^2)} \left[1 - e^{-\frac{(\mu_n^2 + v_n^2) \vartheta}{2\xi}} \right] \right\}. \quad (24)$$

Для оценки интенсивности раскрытия трещины при растворении ее стенок удобно рассматривать средние по дли-

не трещины приращение раскрытия. Из (24) для этой цели может быть получено выражение

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \delta(x, t) dx = \frac{4c_0 D^0 l}{\gamma h^0} \left\{ \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n (\text{ch} v_n - \text{ch} \xi)}{(v_n^2 - \xi^2) \text{sh} v_n} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 [(-1)^{k+1} \text{ch} \xi + 1]}{(\xi^2 + \mu_n^2)(\mu_n^2 + v_n^2)^2} \left[1 - e^{-\frac{(\mu_n^2 + v_n^2) \vartheta}{2\xi}} \right] \right\}. \quad (25)$$

Имея в виду, что при больших значениях ξ можно положить $\text{sh} v_n \approx \text{ch} v_n$, а также заменяя гиперболические функции показательными ($\text{sh} z \approx \text{ch} z \approx e^z/2$), получим для стационарного режима растворения

$$\langle \delta \rangle = \frac{4c_0 l}{\gamma h^0} \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{\xi_n} \left[1 - e^{-(v_n - \xi)} \right]. \quad (26)$$

Величина раскрытия трещины в процессе растворения

$$2h(x, t) = 2h(0) + 2\delta(x, t), \quad (27)$$

определяемая по зависимости (24), не остается постоянной, а меняется как по длине трещины, так и во времени. Следовательно, задача, рассмотренная выше при $h = \text{const}$, дает достаточно точные результаты только при $\delta < 0,2h$. Если это условие не соблюдается, расчет должен проводиться в две стадии. Сначала для заданного времени t по (25) или (26) определяется среднее раскрытие трещины $\langle 2h \rangle$, которое затем подставляется во все итоговые зависимости. Этот прием позволяет приближенно учесть изменение размеров трещины в процессе растворения.

Список литературы

1. Баламирзоев А.Г. Развитие теории и методов прогнозирования суффозионных деформаций при фильтрации в трещиноватых основаниях гидротехнических сооружений: дис. ... д-ра техн. наук. – Махачкала, 2006. – 397 с.
2. Баламирзоев А.Г., Косиченко Ю.М., Магомедова А.В. Расчет суффозионной осадки при неравномерном распределении растворимых солей в грунтах оснований гидротехнических сооружений // Изв. вузов. Сев.-кав. регион. Техн. науки. – 2002. – № 3. – С. 82–84.

3. Веригин Н.Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. // Известия АН СССР, ОТН. – 1953. – № 10.

4. Орадовская А.Е. Фильтрационное выщелачивание дисперсно-распределенного гипса из песчано-глинистых пород // Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957.

5. Патрашев А.Н., Арутюнян Н.Х. Диффузия солей при одномерной фильтрации // Изв. НИИГ. – 1941. – т. 30. – С. 64–77.

References

1. Balamirzoev A.G. Razvitie teorii i metodov prognozirovaniya suffuzionnyh deformacij pri fil'tracii v treshhinovatyh osnovanijah gidrotehnicheskikh sooruzhenij : dissertacija ... doktora tehniceskikh nauk: Mahachkala, 2006. 397 p.
2. Balamirzoev A.G., Kosichenko Ju.M., Magomedova A.V. Raschet suffuzionnoj osadki pri neravnomernom raspredelenii rastvorimyh solej v gruntah osnovanij gidrotehnicheskikh sooruzhenij– Izv.vuzov. Sev.-kav.region. Tehn.nauki, no. 3, 2002. p. 82–84.
3. Verigin N.N. Nekotorye voprosy himicheskoj gidrodinamiki, predstavljajushhie interes dlja melioracii i gidrotehniki.// Izvestija AN SSSR, OTN, 1953, no. 10.
4. Oradovskaja A. E. Fil'tracionnoe vyshhelachivanie dispersno- raspredelennogo gipsa iz peschano-glinistyh porod.//«Rastvorenie i vyshhelachivanie gornyh porod». M.: Gosstrojizdat, 1957.
5. Patrashev A.N., Arytjunjan N.H. Diffyziya solej ppi odnometnoj fil'tpacii // Izv. NIIG, 1941, t.30, pp. 64–77.

Рецензенты:

Агаханов Э.К., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Автомобильные дороги, основания и фундаменты», ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», г. Махачкала;

Баламирзоев А.Г., д.т.н., профессор кафедры прикладной математики Махачкалинского филиала МАДИ, г. Махачкала.

Работа поступила в редакцию 22.04.2013.