УДК 539.3

ПОЛУОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОНЦЕВЫХ УСИЛИЙ В РАМКАХ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Илюхин А.А., Попов А.К.

ФГБОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова», Таганрог, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru, ASDAlexey@yandex.ru

В рамках моментной теории упругости в перемещениях построено решение задачи об исследовании поведения цилиндрического тела в результате воздействия на него торцевых усилий. Построенная модель упругого равновесия цилиндрического тела в математическом отношении сведена к построению решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Определены компоненты тензора напряжений, моментных напряжений, изгиба-кручения, удовлетворяющих в области занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил, формулам закона Гука, рассматриваемым в рамках моментной теории упругости псевдоконтинуума Коссера, а также граничным условиям на боковой поверхности и основаниях стержня. Найдено среднее значение кручения поперечного сечения цилиндрического тела, отличное от решений задач [6, 7], в которых среднее значение кручения не зависит от площади поперечного сечения стержня. Показано, что взаимосвязь крутки и величины S привносит именно учет моментных напряжений. Граничная задача определения неизвестной функции сведена к задаче Неймана для уравнения Пуассона. Доказана математическая непротиворечивость сделанных выводов.

Ключевые слова: моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера, модель упругого равновесия цилиндрического тела

SEMI-INVERSE PROBLEM ON DEFORMATION OF A CYLINDRICAL BODY UNDER THE INFLUENCE OF TRAILER EFFORTS OF THE MOMENT THEORY OF ELASTICITY

Ilyukhin A.A., Popov A.K.

Anton Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Taganrog, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru, ASDAlexey@yandex.ru

In the framework of moment theory of elasticity in displacements construct a solution of the problem of investigation of the behavior of a cylindrical body as a result of exposure to end the effort. The constructed model of elastic equilibrium of a cylindrical body in a mathematically reduced to the construction of solutions of differential equations in partial derivatives. The components of the stress tensor, the couple stress, bending – torsion, meet in a busy body, differential equations of equilibrium in the absence of body forces, equations of Hooke's law, considered in the framework of the Cosserat pseudocontinuum Cosserat theory of elasticity and the boundary conditions on the lateral surface and grounds of the rod. We found the average cross-section of the torsion of a cylindrical body that is different from the solutions [6, 7], in which the average value of torsion does not depend on cross-sectional area of the rod. It is shown that the relationship of S twists and brings it records the couples stress. The boundary value problem of the unknown function, reduced to the Neumann problem for Poisson's equation. We prove the mathematical consistency of the findings.

Keywords: moment the elasticity theory, a pseudo-continuum of Cosserat, model of elastic balance of a cylindrical body

При расчете напряженно-деформированного состояния, в том числе исследовании устойчивости конфигураций упругих тел и упруго-вязких жидкостей [1, 8] необходимо учитывать вращательное взаимодействие частиц. Общие теоретические положения моментной теории упругости начали разрабатываться со времен братьев Коссера и повторный интерес к описанию деформации тел на основе континуума Коссера в научных публикациях проявился во второй половине 20 века. В монографии В.А. Еремеева и Л.И. Зубова [2] достаточно полно описана история развития этого раздела теории упругости и приведены обширные литературные обзоры, указаны области приложения, в частности, при анализе устойчивости. В работе [5] показано, что учет моментных напряжений увеличивает жесткостные характеристики упругого тела и, естественно, в критических ситуациях может оказать существенное влияние на поведение упругого элемента. В рамках механической модели ДНК учет вращательных взаимодействий привел к достаточному совпадению конфигураций ДНК, полученных с помощью построенной в работе теории и тех, которые получены в ряде экспериментальных работ с помощью фотографирования с использованием электронных микроскопов. При определении рабочих характеристик элементов ряда точных приборов, нанотрубок, работающих в условиях упругой деформации, как показывает практика расчетов, должно учитываться вращательное взаимодействие их частиц.

Постановка задачи. Решение пространственных задач теории упругости нередко сводится к решению одной из канонических задач, к числу которых относятся

задачи, описывающие деформацию призматических тел концевыми нагрузками. Одним из математических достоинств таких задач является возможность сведения ее к плоской задаче теории упругости. Кроме того, эти задачи представляют самостоятельный научный и практический интерес. Авторам работы не удалось найти как в монографиях, так и в научных статьях, решение этой задачи. Поэтому в данной работе предпринята попытка аналитического построения исследуемой задачи с целью восполнить пробел в исследовании деформации такого класса тел.

Пусть призматическое тело длиной L закреплено одним концом, а на свободном конце несет нагрузку, статически эквивалентную силе **P**, перпендикулярную к оси тела, приложенную в произвольной точке торцевого сечения. Массовые силы и силы на боковой поверхности тела отсутствуют. Начало координат поместим в произвольной точке торцевого сечения. При этом ось направим параллельно оси тела, а ось – параллельно силе **P**. Сечение исследуемого стержня предполагается односвязным. Задача об упругом равновесии стержня при указанных условиях сводится к нахождению компонент тензора напряжений и моментных напряжений μ_{ij}, удовлетворяющих в области занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил, формулам закона Гука, рассматриваемым в рамках моментной теории упругости, а также граничным условиям на боковой поверхности и основаниях стержня.

Решение в перемещениях поставленной задачи будем искать в виде:

$$\begin{gathered} u_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + B_{11}x_1^2 + B_{12}x_1x_2 + \\ + B_{13}x_1x_3 + B_{22}x_2^2 + B_{23}x_2x_3 + B_{33}x_3^2; \\ u_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + C_{11}x_1^2 + \\ + C_{12}x_1x_2 + C_{13}x_1x_3 + C_{22}x_2^2 + C_{23}x_2x_3 + C_{33}x_3^2; \\ u_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + E_{11}x_1^2 + E_{12}x_1x_2 + \\ + E_{13}x_1x_3 + E_{22}x_2^2 + E_{23}x_2x_3 + E_{33}x_3^2 + p\varphi, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varphi(x_1, x_2)$ – некоторая функция, подлежащая определению, $p = P/S$.

Основные кинематические соотношения, закон Гука и уравнения равновесия в рамках моментной теории упругости представлены в виде [3]:

$$\begin{gathered} \gamma_{ij} = u_{i,j} - \in^{ijk} \omega^k; \\ \omega^k = \frac{1}{2} \in^{ijk} r_t \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^s} - \Gamma^m_{sk} u_m \right); \\ \kappa_{ji} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k; \quad \sigma^{ji}_{,j} = 0; \\ \mu^{ji}_{,j} + \in^{ijk} \sigma_{jk} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где u_i, ω_k – ковариантные компоненты вектора перемещений и микроповорота; γ_{ij}, κ_{ji}, σ^{ij}, μ^{ij} – компоненты тензоров деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений; Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля второго рода; $\in^{skt}$ – компоненты тензора Леви-Чивиты.

Решение поставленной задачи производится в декартовой прямоугольной системе координат. В результате кинематические соотношения (2) могут быть преобразованы к виду:

$$\begin{gathered} \gamma_{nk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right); \\ \omega^k = \frac{1}{2} \in^{skt} r_t \frac{\partial u_k}{\partial x_s}; \quad \kappa_{ji} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}. \end{gathered} \tag{3}$$

Для того чтобы удовлетворить двум группам уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial x_j} + \in^{ijk} \sigma_{jk} = 0, \tag{4}$$

определим с учетом (1) значения компонент симметричного тензора деформаций:

$$\begin{gathered} \gamma_{11} = A_{11} + 2B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3; \quad \gamma_{22} = A_{22} + C_{12}x_1 + 2C_{22}x_2 + C_{23}x_3; \\ \gamma_{33} = A_{33} + E_{13}x_1 + E_{23}x_2 + 2E_{33}x_3; \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}\left((B_{12} + 2C_{11})x_1 + (2B_{22} + C_{12})x_2 + (C_{13} + B_{23})x_3 + A_{12} + a_{21} \right); \end{gathered} \tag{5}$$

$$\gamma_{13}=\gamma_{31}=\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+(B_{13}+2E_{11})x_1+(E_{12}+B_{23})x_2+(E_{13}+2B_{33})x_3+A_{13}+A_{31}\right);$$

$$\gamma_{23}=\gamma_{32}=\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+(B_{13}+2E_{11})x_1+(E_{12}+B_{23})x_2+(E_{13}+2B_{33})x_3+A_{23}+A_{32}\right);$$

тензора изгиба – кручения:

$$\kappa_{11}=\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}+E_{12}-C_{13}\right).$$

$$\kappa_{22}=-\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}+E_{12}-B_{23}\right);$$

$$\kappa_{33}=\frac{1}{2}(C_{13}-B_{23});\quad \kappa_{31}=\frac{E_{23}}{2}-C_{33};\ (6)$$

$$\kappa_{12}=-\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+2E_{11}-B_{13}\right);$$

$$\kappa_{21}=\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+2E_{22}-C_{23}\right);$$

$$\kappa_{13}=C_{11}-\frac{B_{12}}{2};\quad \kappa_{23}=\frac{C_{12}}{2}-B_{22};$$

$$\kappa_{32}=B_{33}-\frac{E_{13}}{2}.$$

Если среда изотропная, то закон Гука принимает вид:

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\gamma_{kk}+(\mu-\alpha)\gamma_{ji}+(\mu+\alpha)\gamma_{ij};$$

$$\mu_{ij}=\varepsilon\delta_{ij}\kappa_{kk}+(\upsilon-\beta)\kappa_{ji}+(\upsilon+\beta)\kappa_{ij},\ (7)$$

где δ_{ij} – символы Кронекера.

Учитывая значения компонент тензора деформаций (5) и первое равенство закона Гука (7), получим соответствующие значения компонент тензора силовых напряжений:

$$\sigma_{11}=((C_{12}+E_{13})\lambda+2B_{11}(\lambda+2\mu))x_1+((2C_{22}+E_{23})\lambda+B_{12}(\lambda+2\mu))x_2+$$
$$+((C_{23}+2E_{33})\lambda+B_{13}(\lambda+2\mu))x_3++(\mathrm{A}_{22}+\mathrm{A}_{33})\lambda+(\lambda+2\mu)\mathrm{A}_{11};$$
$$\sigma_{22}=((2B_{11}+E_{13})\lambda+C_{12}(\lambda+2\mu))x_1+((B_{12}+E_{23})\lambda+2C_{22}(\lambda+2\mu))x_2+$$
$$+((B_{13}+2E_{33})\lambda+C_{23}(\lambda+2\mu))x_3+(A_{11}+A_{33})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{22};$$
$$\sigma_{33}=((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu))x_1+((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu))x_2+$$
$$+((C_{23}+B_{13})\lambda+2E_{33}(\lambda+2\mu))x_3+(A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33};$$
$$\sigma_{12}=\mu((B_{12}+2C_{11})x_1+(2B_{22}+C_{12})x_2+(C_{13}+B_{23})x_3+A_{12}+A_{21});$$

$$\sigma_{13}=\mu\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+(B_{13}+2E_{11})x_1+(E_{12}+B_{23})x_2+(E_{13}+2B_{33})x_3+A_{13}+A_{31}\right);$$

$$\sigma_{23}=\mu\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+(C_{13}+E_{12})x_1+(C_{23}+2E_{22})x_2+(E_{23}+2C_{33})x_3+A_{23}+A_{32}\right).\quad (8)$$

С учетом значения компонент псевдотензора изгиба-кручения (4) компоненты тензора моментных напряжений, получаемые из закона Гука (8), представимы в виде:

$$\mu_{11}=\nu\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}+E_{12}-C_{13}\right);\quad \mu_{22}=-\nu\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}+E_{12}-B_{23}\right);\quad \mu_{33}=\nu(B_{23}-C_{13});$$

$$\mu_{12}=\frac{(\nu+\beta)}{2}(B_{13}-2E_{11})+\frac{(\nu-\beta)}{2}(2E_{22}-C_{23})+p\left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^{\,2}}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^{\,2}}\right)-\frac{\beta}{2}\Delta\varphi\right);$$

$$\mu_{21}=\frac{(\nu+\beta)}{2}(2E_{22}-C_{23})-\frac{(\nu-\beta)}{2}(2E_{11}-B_{13})+p\left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right)+\frac{\beta}{2}\Delta\varphi\right);$$

$$\mu_{13}=\frac{1}{2}\left((\nu+\beta)(2C_{11}-B_{12})+(\nu-\beta)(E_{23}-2C_{33})\right);$$

$$\mu_{31}=\frac{1}{2}\left((\nu+\beta)(E_{23}-2C_{33})+(\nu-\beta)(2C_{11}-B_{12})\right);$$

$$\mu_{23}=\frac{1}{2}\left((\nu+\beta)(C_{12}-2B_{22})+(\nu-\beta)(2B_{33}-E_{13})\right);$$

$$\mu_{32}=\frac{1}{2}\left((2B_{33}-E_{13})(\nu+\beta)+(\nu-\beta)(C_{12}-2B_{22})\right). \quad (9)$$

Первая группа уравнений равновесия (4) с учетом значений компонент тензора напряжений (8) и (9), преобразуется к виду:

$$2(\lambda+2\mu)B_{11}+(\lambda+\mu)(C_{12}+E_{13})+2\mu(B_{22}+B_{33})=0;$$

$$2(\lambda+2\mu)C_{22}+(\lambda+\mu)(B_{12}+E_{23})+2\mu(C_{11}+C_{33})=0;$$

$$\Delta\varphi=-\frac{1}{p}\left(\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)(B_{13}+C_{23})+2\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)E_{33}+2(E_{11}+E_{22})\right). \quad (10)$$

Аналогично записывается вторая группа уравнений равновесия (4):

$$\frac{p(\nu+\beta)}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\varphi=0;$$

$$-\frac{p(\nu+\beta)}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\varphi=0. \quad (11)$$

Третье уравнение второй группы уравнений равновесия (4) удовлетворяется тождественно.

Запишем граничные условия на основании $x_3 = L$ цилиндрического тела:

$$V_1=P;\ M_1=M_2=M_3=0.$$

На основании вышеприведенных формул можно получить:

$$V_1=\int_S\sigma_{13}dS=\mu\left(\int_S p\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dS+(B_{13}+2E_{11})S_1+(E_{12}+B_{23})S_2+S\left((E_{13}+2B_{33})L+A_{13}+A_{31}\right)\right)=P;$$

$$V_2=\int_S\sigma_{23}dS=\left(p\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dS+(C_{13}+E_{12})S_1+(C_{23}+2E_{22})S_2+S\left((E_{23}+2C_{33})L+A_{23}+A_{32}\right)\right)=0; \quad (12)$$

$$V_3=\int_S\sigma_{33}dS=\left((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu)\right)S_1+\left((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu)\right)S_2+$$

$$+S\left(\left((C_{23}+B_{13})\lambda+2E_{33}(\lambda+2\mu)\right)L+(A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33}\right)=0.$$

Граничные условия на основании $x_3 = 0$ цилиндрического тела:

$$V_1=\int_S\sigma_{13}dS=\mu\left(\int_S p\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dS+(B_{13}+2E_{11})S_1+(E_{12}+B_{23})S_2+S(A_{13}+A_{31})\right)=-P;$$

$$V_2=\int_S\sigma_{23}dS=\mu\left(p\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dS+(C_{13}+E_{12})S_1+(C_{23}+2E_{22})S_2+S(A_{23}+A_{32})\right)=0; \quad (13)$$

$$V_3=\int_S\sigma_{33}dS=S\left((A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33}\right)+$$

$$+\left((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu)\right)S_1+\left((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu)\right)S_2=0.$$

Из равенств (12) и (13) выполняются следующие равенства:

$$E_{13}+2B_{33}=0;$$

$$E_{23}+2C_{33}=0;$$

$$(C_{23}+B_{13})\lambda+2E_{33}(\lambda+2\mu)=0. \quad (14)$$

Вычислив компоненты моментов внутренних сил в поперечном сечении, граничные условия (13) можно записать в виде:

$$\mu\left(p\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dS+(B_{13}+2E_{11})S_2+(E_{12}+B_{23})S_1+S(A_{13}+A_{31})\right)=P;$$

$$\mu\left(p\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dS+(C_{13}+E_{12})S_2+(C_{23}+2E_{22})S_1+S(A_{23}+A_{32})\right)=0;$$

$$((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu))S_2+((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu))S_1+S((A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33})=0;$$

$$((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu))I_{12}+((A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33})S_1+((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu))I_{11}+$$

$$+\frac{1}{2}((\nu+\beta)(E_{23}-2C_{33})+(\nu-\beta)(2C_{11}-B_{12}))S=0;$$

$$-(((2B_{11}+C_{12})\lambda+E_{13}(\lambda+2\mu))I_{22}+((B_{12}+2C_{22})\lambda+E_{23}(\lambda+2\mu))I_{12})-$$

$$-((A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33})S_2+\frac{S}{2}((2B_{33}-E_{13})(\nu+\beta)+(\nu-\beta)(C_{12}-2B_{22}))=-PL;$$

$$((C_{13}+E_{12})I_{22}-(B_{23}+E_{12})I_{11}+p(T-I_{11}-I_{22}))\mu+\nu(B_{23}-C_{13})S=0, \quad (15)$$

где $T=\mu\int_S\left(x_1\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1^2+x_2^2\right)dS$;; S_1 и S_2 – статические моменты поперечного сечения стержня относительно осей x_1 и x_2; I_{11}, I_{22} и I_{12} – моменты инерции сечения.

Компоненты единичного вектора нормали к боковой поверхности:

$$n_1=\frac{dx_2}{d\ell},\ n_2=-\frac{dx_1}{d\ell}.$$

Запишем граничные условия на боковой поверхности стержня с прямолинейной осью:

$$\sigma_{1k}n_1+\sigma_{2k}n_2=0;$$

$$\mu_{1k}n_1+\mu_{2k}n_2=0;\quad k=1,2,3. \quad (16)$$

Учитывая независимость переменных x_1, x_2, x_3,, друг от друга, константы, стоящие при соответствующих независимых переменных, также приравняем нулю:

$$(C_{12}+E_{13})\lambda+2B_{11}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$(2C_{22}+E_{23})\lambda+B_{12}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$B_{12}+2C_{11}=0;$$

$$(C_{23}+2E_{33})\lambda+B_{13}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$C_{13}+B_{23}=0;$$

$$(B_{13}+2E_{33})\lambda+C_{23}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$(A_{22}+A_{33})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{11}=0;$$

$$2B_{22}+C_{12}=0; \quad (17)$$

$$(A_{11}+A_{33})\lambda+(\lambda+2\mu)\ A_{22}=0;$$

$$(2B_{11}+E_{13})\lambda+C_{12}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$(B_{12}+E_{23})\lambda+2C_{22}(\lambda+2\mu)=0;$$

$$A_{12}+A_{21}=0.$$

Третье равенство первой группы граничных условий на боковой поверхности стержня (16) с учетом равенства (17) представляется в виде условия Неймана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-((B_{13}+2E_{11})x_1+(E_{12}+B_{23})x_2+A_{13}+A_{31})\frac{n_1}{p}-$$

$$-((C_{13}+E_{12})x_1+(C_{23}+2E_{22})x_2+A_{23}+A_{32})\frac{n_2}{p}. \quad (18)$$

Аналогично для тождественного удовлетворения третьего равенства второго уравнения (16) компоненты тензора моментных напряжений μ_{13}, μ_{23}, достаточно положить равными нулю. Константы, стоящие при независимых переменных, также приравняем нулю:

$$(\nu+\beta)(2C_{11}-B_{12})+(\nu-\beta)(E_{23}-2C_{33})=0;$$
$$(\nu+\beta)(C_{12}-2B_{22})+(\nu-\beta)(2B_{33}-E_{13})=0. \quad (19)$$

Проинтегрируем первые два равенства второго уравнения (16) вдоль контура L:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{1}{\nu p}\left[\left((\nu-\beta)(B_{13}-2E_{11})+(\nu+\beta)(2E_{22}-C_{23})+(\nu+\beta)p\Delta\varphi\right)\frac{x_1}{2}-\nu(E_{12}-C_{13})x_2+\nu pc_1\right]; \quad (20)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=\frac{1}{\nu p}\left[\nu(B_{23}-E_{12})x_1+\nu pc_2-\left((\nu+\beta)(B_{13}-2E_{11})+(\nu-\beta)(2E_{22}-C_{23})-(\nu+\beta)p\Delta\varphi\right)\frac{x_2}{2}\right],$$

где c_1, c_2 – константы, возникающие в результате интегрирования.

Условия Неймана (20), полученные из второй группы граничных условий, должны совпадать с условиями Неймана, полученными из первой группы граничных условий (18). Приравняем коэффициенты, стоящие при соответствующих переменных:

$$\frac{1}{2\nu}\left((\nu-\beta)(2E_{11}-B_{13})-(\nu+\beta)(2E_{22}-C_{23})+2(\nu+\beta)(E_{11}+E_{22})\right)=(B_{13}+2E_{11});$$

$$-C_{13}=B_{23};\quad c_1=-\frac{1}{p}(A_{13}+A_{31});$$

$$\frac{1}{2\nu}\left((\nu+\beta)(B_{13}-2E_{11})+(\nu-\beta)(2E_{22}-C_{23})+2(\nu+\beta)(E_{11}+E_{22})\right)=(C_{23}+2E_{22}); \quad (21)$$

$$c_2=-\frac{1}{p}(A_{23}+A_{32}).$$

Интегрируя равенства (20) вдоль контура L и применяя формулу Остроградского, получим:

$$\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dS+\frac{1}{p}\left[(E_{12}+B_{23})S_1+(B_{13}+2E_{11})S_2\right]-c_1S+\frac{S_2}{p}(B_{13}+C_{23})=K_1;$$

$$\int_S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{p}\left[(C_{13}+E_{12})x_1+(C_{23}+2E_{22})x_2-pc_2\right]+x_2\left(\Delta\varphi+\frac{1}{p}\left(B_{13}+C_{23}+2(E_{11}+E_{22})\right)\right)\right)dS=$$
$$=\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dS+\frac{1}{p}\left[(C_{13}+E_{12})S_2+(C_{23}+2E_{22})S_1\right]-c_2S+\frac{S_1}{p}(B_{13}+C_{23}).$$

Преобразуем последние уравнения с учетом условия Неймана (20):

$$\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dS=K_1+c_1S-\frac{S_2}{p}(B_{13}+C_{23})-\frac{1}{p}\left[(E_{12}+B_{23})S_1+(B_{13}+2E_{11})S_2\right];$$

$$\int_S\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dS=K_2+c_2S-\frac{S_1}{p}(B_{13}+C_{23})-\frac{1}{p}\left[(C_{13}+E_{12})S_2+(C_{23}+2E_{22})S_1\right];$$

$$\frac{1}{p}\left(\frac{P}{\mu}-(B_{13}+2E_{11})S_2-(E_{12}+B_{23})S_1-S(A_{13}+A_{31})\right)=K_1-\frac{1}{p}(A_{13}+A_{31})S-$$
$$\frac{S_2}{p}(B_{13}+C_{23})-\frac{1}{p}\left[(E_{12}+B_{23})S_1+(B_{13}+2E_{11})S_2\right];$$

$$-\frac{1}{p}\left(\left(C_{13}+E_{12}\right)S_2+\left(C_{23}+2E_{22}\right)S_1+S\left(A_{23}+A_{32}\right)\right)=$$

$$=K_2-\frac{1}{p}\left(A_{23}+A_{32}\right)S-\frac{S_1}{p}\left(B_{13}+C_{23}\right)-\frac{1}{p}\left[\left(C_{13}+E_{12}\right)S_2+\left(C_{23}+2E_{22}\right)S_1\right];$$

$$K_1=\frac{S}{\mu};\quad K_2=0 \tag{22}$$

Из равенств (10), (14), (15), (17), (19), (21), (22) получаем взаимосвязи между константами:

$$B_{23}=-C_{13}=\frac{P\ell}{I_{22}\lambda};$$

$$E_{12}=\frac{P\left[S\ell\left(\mu\left(I_{11}+I_{22}\right)+2\nu S\right)-\mu\lambda I_{22}\left(T+I_{11}+I_{22}\right)\right]}{I_{22}\lambda\mu S\left(I_{22}-I_{11}\right)}; \tag{23}$$

$$A_{13}=-A_{31}-pc_1;\quad A_{23}=-A_{32}-pc_2;$$

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=B_{11}=B_{12}=B_{13}=$$

$$=B_{22}=B_{33}=C_{11}=C_{12}=C_{22}=C_{23}=0;$$

$$C_{33}=E_{13}=E_{23}=E_{33}=0;\quad A_{12}=-A_{21}.$$

С учетом взаимосвязи (23) между константами третье уравнение (10) преобразуется к виду:

$$\Delta\varphi=-2\left(E_{11}+E_{22}\right)/p. \tag{24}$$

Таким образом, граничная задача определения функции $\varphi(x_1, x_2)$, является задачей Неймана (10) для уравнения Пуассона (24). Константы E_{11}, E_{22}, и их сумма $E_{11}+E_{22}$ должны быть отличны от нуля, иначе решение поставленной задачи в перемещениях, представимое в виде (1), приведет к противоречиям, заключающимся в том, что константа K_1 равна нулю.

В результате найденные компоненты вектора перемещений приобретают вид:

$$u_1=A_{12}x_2+A_{13}x_3+\frac{P\ell}{I_{22}\lambda}x_2x_3;\quad u_2=-A_{12}x_1+A_{23}x_3-\frac{P\ell}{I_{22}\lambda}x_1x_3;$$

$$u_3=A_{31}x_1+A_{32}x_2+E_{11}x_1^2+\frac{P\left[S\ell\left(\mu\left(I_{11}+I_{22}\right)+2\nu S\right)-\mu\lambda I_{22}\left(T+I_{11}+I_{22}\right)\right]}{I_{22}\lambda\mu S\left(I_{22}-I_{11}\right)}x_1x_2+E_{22}x_2^2+p\varphi.$$

Выпишем выражения для компонент симметричного тензора силовых напряжений:

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=0;$$

$$\sigma_{13}=\mu\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+2E_{11}x_1+\frac{p\left[2S\ell\left(\mu I_{22}+\nu S\right)-\mu\lambda I_{22}\left(T+I_{11}+I_{22}\right)\right]}{I_{22}\lambda\mu\left(I_{22}-I_{11}\right)}x_2+A_{13}+A_{31}\right);$$

$$\sigma_{23}=\mu\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{p\left[2S\ell\left(\mu I_{11}+\nu S\right)-\mu\lambda I_{22}\left(T-I_{11}-I_{22}\right)\right]}{I_{22}\lambda\mu\left(I_{22}-I_{11}\right)}x_1+2E_{22}x_2+A_{23}+A_{32}\right).$$

и компонент тензора моментных напряжений:

$$\mu_{11}=\nu p\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}+\frac{2S\ell\left(\mu I_{22}+\nu S\right)-\mu\lambda I_{22}\left(T+I_{11}+I_{22}\right)}{I_{22}\mu\lambda\left(I_{22}-I_{11}\right)}\right);$$

$$\mu_{33}=-\frac{\nu P\ell}{I_{22}\lambda};\quad \mu_{21}=-\nu\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+2E_{11}\right);$$

$$\mu_{22} = -\nu p\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{2S\ell\left(\mu I_{22} + \nu S\right) - \mu\lambda I_{22}\left(T - I_{11} - I_{22}\right)}{I_{22}\mu\lambda\left(I_{22} - I_{11}\right)}\right);$$

$$\mu_{12} = \nu\left(p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + 2E_{22}\right); \quad \mu_{13} = \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = 0.$$

Выводы. В сравнении со случаями исследования прямолинейного стержня [6, 7] депланацию поперечного сечения стержня вызывают не только компоненты тензора силовых напряжений σ_{13}, σ_{23}, но и компоненты тензора моментных напряжений μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}.

Среднее значение кручения поперечного сечения определяется формулой:

$$\tau = \frac{1}{S}\int_S \kappa_{33} dS = -\frac{pS\ell}{I_{22}\lambda}, \qquad (25)$$

из которой можно сделать вывод, что τ зависит от p и геометрических характеристик стержня (длины стержня L и осевого момента инерции I_{22}) и не зависит от формы поперечного сечения тела. Значит, под действием силы P стержень будет закручиваться в направлении от оси Ox_2 к оси Ox_1, о чем и говорит минус, стоящий в формуле (25). Заметим, что в формуле (25), для $p = 0$ – τ равно нулю. В сравнении со случаем кручения прямолинейного стержня [3], в рамках которого среднее значение кручения τ зависит от крутящего момента M_k, аналога геометрической жесткости при кручении T, в исследуемой задаче τ зависит, в том числе, и от площади поперечного сечения стержня S: $\tau = M_k/T + 2\nu S$. Следовательно, взаимосвязь крутки τ и величины S привносит именно учет моментных напряжений. Как и в случае кручения [3] и растяжения [4] микрополярного естественно-закрученного стержня:

$$\tau = \frac{p\left(\lambda I_p - \left(3\lambda + 2\mu\right)T\right)\tau_0}{\left(3\lambda + 2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda + 2\mu\right)\nu S}.$$

Данная статья написана при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.1885.2011, тема: «Математическое моделирование статики и динамики гибридных механических систем и идентификация их параметров», научный руководитель – Илюхин Александр Алексеевич.

Список литературы

1. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. – 1960. – Т. 2. – С. 1399–1409.

2. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости. – Ростов н/Д.: Изд-во ЮНЦ РАН, 2009. – 128 с.

3. Илюхин А.А., Попов А.К. Кручение стержня в рамках псевдоконтинуума Коссера // Вестник ТГПИ. – Таганрог: Изд. отдел ГОУВПО «ТГПИ», 2011. – № 1. – С. 43–50.

4. Илюхин А.А., Попов А.К. Растяжение микрополярного естественно закрученного стержня // Научно-технический вестник Поволжья. – Казань, 2011. – № 6.

5. Илюхин А.А., Тимошенко Д.В. Математическая модель замкнутых молекул ДНК // Известия Саратовского университета. – 2008. –Т.8. – Вып. 3. – С. 32–40.

6. Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю. Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим // ДАН СССР. – 1939. – т. XXIV. – № 1–№ 3.

7. Риз П.М. Деформация естественно закрученных стержней // ДАН СССР. – 1939. – Т. 3, № 4. – С. 451.

8. Шкутин Л.И. Численный анализ разветвленных форм изгиба арок // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 155–160.

References

1. Ajero Je.L., Kuvshinskij E.V. Osnovnye uravnenija teorii uprugosti sred s vrawatel'nym vzaimodejstviem chastic // FTT. 1960. T. 2. pp. 1399–1409.

2. Eremeev V.A., Zubov L.M. Osnovy mehaniki vjazkouprugoj mikropoljarnoj zhidkosti. Rostov-na-Donu: Izd-vo JuNC RAN, 2009. 128 p.

3. Iljuhin A.A., Popov A.K. Kruchenie sterzhnja v ramkah psevdokontinuuma Kossera. Vestnik TGPI. Taganrog: Izd. otdel GOUVPO «TGPI», 2011. no. 1. pp. 43–50

4. Iljuhin A.A., Popov A.K. Rastjazhenie mikropoljarnogo estestvenno zakruchennogo sterzhnja. Nauchno-technicheskij vestnik Povolzh'ja. no. 6 2011. Kazan'.

5. Iljuhin A.A., Timoshenko D.V. Matematicheskaja model' zamknutyh molekul DNK. // Izvestija Saratovskogo Universiteta. 2008. T.8.vyp. 3. pp. 32–40.

6. Lur'e A.I., Dzhanelidze G.Ju. Zadacha Sen-Venana dlja sterzhnej, blizkih k prizmaticheskim. DAN, t. XXIV, no. 1–3, 1939.

7. Riz P.M. Deformacija estestvenno zakruchennyh sterzhnej. Doklady AN SSSR, 1939, t.3, no. 4, pp. 451.

8. Shkutin L.I. Chislennyj analiz razvetvlennyh form izgiba arok. // Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika. 2001. T. 42, no. 4. pp. 155–160.

Рецензенты:

Куповых Г.В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой физики Технологического института Южного федерального университета, г. Таганрог;

Антонов А.В., д.т.н., профессор, декан факультета кибернетики Обнинского института атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки Российской Федерации, г. Обнинск.

Работа поступила в редакцию 19.03.2012.