УДК 372.851(051)

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Фалилеева М.В.

Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, e-mail: mmwwff@yandex.ru

Важнейшим условием обучения решению уравнений и неравенств с параметром является построение прочной взаимосвязи между понятиями «уравнение (неравенство) без параметра» и «уравнение (неравенство) с параметром». Понимание параметра как формы обобщения определенного вида задач позволяет решать различные виды уравнений и неравенств с параметрами с 7 по 11 классы общеобразовательной школы. Одним из эффективных методических приемов, обеспечивающих реализацию этого принципа, является решение частных случаев задачи с параметром. Решение частных случаев уравнения (неравенства) с параметром обеспечивает раннее усвоение понятия параметра и является одним из этапов методического комплекса задач, основанного на «укрупнении» решения одного уравнения (неравенства) с параметром. Методический комплекс задач включает в себя: выбор «ключевой» задачи, решение ее частных случаев различными методами, формулирование задач-следствий и их решение, формулирование и решение задач с изменением отдельных условий.

Ключевые слова: обучение математике, уравнение, неравенство, параметр, частные случаи

METHODICAL ASPECTS OF TRAINING THE SOLUTION OF THE EQUATIONS AND INEQUALITIES WITH PARAMETERS

Falileeva M.V.

N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, e-mail: mmwwff@yandex.ru

The most important condition of training the solution of the equations and inequalities with parameter is the creation of strong interrelation between the concepts «an equation (inequality) without a parameter» and «an equation (inequality) with a parameter». The understanding of parameter as forms of generalization of a certain type of tasks allows to solve different types of the equations and inequalities with parameters with 7 on 11 classes of comprehensive school. One of the effective methods providing the realization of this principle is the solution of special cases of a task with a parameter. The solution of special cases of the equation (inequality) with a parameter provides early learning of concept of a parameter and is one of the stages of a methodical complex of the tasks based on the «composition» of the solution of one equation (inequality) with a parameter. The methodical complex of tasks includes: the choice of a «key» task, the solution of its special cases using various methods, the formulation of tasks – consequences and their solutions, the formulation and the solution of tasks with the change of sertain conditions.

Keywords: mathematics training, equation, inequality, parameter, special cases

Интенсивная информатизация общества создала необходимость в увеличении методического обеспечения для продуктивной учебной деятельности учащихся общеобразовательных учреждений. На первый план в обучении выдвигается формирование исследовательских умений: анализировать информацию, систематизировать ее, сравнивать, отделять главное от второстепенного, обобщать, выдвигать предположения о возможных путях решения проблемы, приводить примеры и контрпримеры и т.п.

Роль математики как важнейшего инструмента в развитии исследовательских форм мышления школьника бесспорна, но ее содержание и традиционные методики требуют значительного увеличения доли исследовательских задач и методов даже в раскрытии общеизвестных школьных тем. Эта проблема обусловлена, с одной стороны, человеческим фактором – качеством и содержанием профессиональной подготовки учителей, их настроением, современной системой воспитания детей, с другой стороны, неразработанностью общеизвестных, качественных и доступных методик обучения решению задач, развивающих у учащихся общеобразовательных учреждений *продуктивный уровень* усвоения учебного материала.

В современной теории обучения математике одним из приемов развития эвристического и творческого типа продуктивных действий учащегося является решение задачи с параметром. Задача с параметром, по мнению П.М. Эрдниева, – это естественный этап в решении любой математической задачи [6]. Отсюда актуальность этой проблемы обусловлена не столько потребностями ГИА и ЕГЭ, сколько необходимостью создания целостной методики обучения, включающей обеспечение развития у школьников продуктивного уровня усвоения учебного материала по многим темам, в частности, по решению уравнений и неравенств.

В требованиях к уровню подготовки выпускников основной школы написано, что «в результате изучения математики ученик

должен уметь решать линейные, квадратные уравнения и рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы двух линейных уравнений и несложные нелинейные системы; решать линейные, квадратные неравенства с одной переменной и их системы» [4, с. 21]. Ни в энциклопедии элементарной математики, ни государственном образовательном стандарте нет понятия «уравнение (неравенство) с параметром», не представлены методы их решения. Поскольку параметризировать можно любую математическую задачу, получаем, что все уравнения и неравенства делятся на две группы – без параметров и с параметрами. Поэтому существующий в школьной методике математики подход – ставить уравнения (неравенства) с параметрами в один ряд с квадратными, дробными, логарифмическими, содержащими модуль и др. – не имеет под собой никакого обоснования. Исходя из сущности задач с параметрами, их решение – это качественное обобщение и систематизация учебного опыта учащегося на более высоком продуктивном уровне деятельности. Поэтому технология решения задач с параметрами должна быть гармонично вплетена в каждую тему, четко оговорена, должны быть разобраны примеры, приведена система упражнений.

У школьников понятие уравнения (неравенства) с параметром должно включать в себя понимание того, что:

1. Уравнение (неравенство) с параметром – это семейство уравнений (неравенств) одного вида при одних значениях параметра, других видов – при других значениях параметра, при каких-то значениях параметра в это семейство входят верные или неверные тождества (числовые неравенства). Так, уравнение

$$(a-1)\sqrt{x+2} = (a+1)x$$

при $a = 1$ принимает вид линейного; при $a = -1$ становится простейшим иррациональным; если $a \neq 1$, $a \neq -1$, – уравнение иррациональное.

2. Решение уравнения (неравенства) может включать в себя несколько методов решения, соответствующих каждому виду уравнения при определенных значениях параметра. Например, при каком-то значении параметра неравенство линейное, поэтому решаем его аналитически тождественными преобразованиями; при остальных значениях параметра неравенство квадратичное, – решаем его функционально-графическим способом.

Выделим в обучении решению уравнений (неравенств) пять уровней подготовки учащихся по теме «Уравнения и неравенства»:

1) умение решать простейшие уравнения (неравенства);

2) умение решать уравнения (неравенства), приведенные к простейшим, путем «несложных» тождественных преобразований (прибавление числа к обеим частям уравнения (неравенства), деление обеих частей уравнения (неравенства) на число, приведение к общему числовому знаменателю, приведение подобных и т.п.);

3) умение решать простейшие уравнения (неравенства) с параметрами и уравнения (неравенства), приводимые к ним путем «несложных» тождественных преобразований;

4) умение решать уравнения (неравенства), приведенные к простейшим, путем «сложных» преобразований (использование формул сокращенного умножения, замены переменой, разложения на множители, свойств функций и ее графика и др.);

5) умение решать уравнения (неравенства) с параметрами, приведенные к простейшим, путем «сложных» преобразований.

Уровни 1-й и 2-й обеспечивают репродуктивную деятельность школьника, 3-й и 4-й – как репродуктивную, так и продуктивную, 5-й уровень обеспечивает продуктивную деятельность школьника при решении уравнений и неравенств. При обучении должна соблюдаться преемственность развития вышеперечисленных уровней. Так, выпускники 8-го класса в процессе обучения должны уметь решать следующие уравнения в соответствии с уровнями подготовки:

1) $x^2 - 2x + 3 = 0$;

2) $x^2 + 1 = \dfrac{2x+1}{3}$;

3) $x^2 + 2x + ax - 3 = 0$;

4) $(x + 2)^4 - 3 = 2x^2 + 4x$;

5) $(x + a)^4 - 4(x + a)^2 = x^2$.

Значит, существует потребность методического обеспечения решения уравнений (неравенств) с параметрами на двух уровнях (3 и 5). Уровень 3 – это методика решения простейших уравнений (неравенств) с параметризацией различных числовых коэффициентов (табл. 1), и уровень 5 – более сложных уравнений (неравенств), решаемых аналитическим, функционально-графическим или геометрическим методами. Но простейшие уравнения (неравенства) с параметризацией различных коэффициентов не одинаковы по степени сложности. В табл. 1 более простая параметризация обозначена уровнем (3.1), более сложная – (3.2).

Таблица 1

Различные виды параметризации уравнений и неравенств в 7–9 классах

	Виды уравнений (неравенств) с параметрами	Параметризация	Уровни	Примеры
1.	*Линейные уравнения (неравенства)*	– свободного члена;	3.1	$2x = a - 4$
		– коэффициента при переменной;	3.1	$(a - 2)x < 4$
		– свободного члена и коэффициента при переменной	3.2	$(a - 2)x \le 4a$
2.	*Рациональные уравнения с двучленами первой степени* в числителе и знаменателе	– свободного члена в числителе;	3.1	$\frac{x+2a}{x-6} = 0$
		– свободного члена в знаменателе;	3.1	$\frac{2}{x-a} = 0$
		– свободных членов в числителе и в знаменателе;	3.2	$\frac{x+2a}{x-a} = 0$
		– коэффициентов при переменной в числителе или знаменателе.	3.2	$\frac{ax+2}{x-6a} = 0$
3.	*Квадратные уравнения (неравенства)*	– свободного члена;	3.1	$x^2 - 2x + a + 3 \ge 0$
		– коэффициента при переменной 1-й степени;	3.1	$x^2 - (2 + a)x + 3 = 0$
		– коэффициента при старшем члене;	3.2	$ax^2 - 2x + 3 \le 0$
		– коэффициентов при переменной или свободном члене.	3.2	$ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$
4.	*Иррациональные уравнения*	– под знаком квадратного радикала;	3.1	$\sqrt{x+2a} = 3$
		– вне знака квадратного радикала;	3.1	$\sqrt{x+2a} = a$
		– под знаком радикала и вне знака радикала	3.2	$\sqrt{x+2a} = 3 - a$

При первом ознакомлении учащихся с простейшими уравнениями (неравенствами) с параметрами учителю необходимо показать единство и взаимосвязь между уравнениями (неравенствами) без параметра с уравнениями (неравенствами) с параметром. Для решения этой задачи можно использовать решения *частных случаев* уравнений (неравенств) с параметрами [5]. В различных учебных пособиях, в частности, направленных на повышение качества подготовки учащихся по решению задач с параметрами, решения в частных случаях не представлены. Но многолетняя практика обучения решению задач с параметрами показала, что решение частных случаев задач с параметром – это необходимый «мост», связывающий в единое целое задачи с параметром и без параметра. Решения в частных случаях способствуют развитию следующих видов продуктивной учебной деятельности учащихся: умение выделять частные случаи, анализ общих свойств и умение находить отличия в решениях и ответах, умение выдвигать гипотезу о методе решения задачи и доказывать ее состоятельность или опровергать ее. Для педагога использование частных случаев при изучении уравнений и неравенств – это инструмент для качественной актуализации уравнений (неравенств) без параметров, возможность успешно вводить уравнения (неравенства) с параметрами на раннем этапе обучения (в 7 классе) и качественно систематизировать и обобщать изученный материал в средней и старшей школе. Решение частных случаев желательно размещать в сравнительную таблицу (табл. 2), которая должна показывать единство этапов решений частных случаев и подводить к решению задачи с параметром.

Задача. Решите уравнение $\frac{x+2a}{x-6} = 0$ с параметром a.

Вопрос: «Какие корни будет иметь уравнение при $a = 2$, $a = 0$, $a = -3$?» Составим сравнительную табл. 2:

Таблица 2

Представление частных случаев и решения уравнения с параметром на начальных этапах обучения

	Частные случаи			Решение уравнения $\frac{x+2a}{x-6}=0$	
Если	$a = 2$	$a = 0$	$a = -3$	$2a = -6$, т.е. $a = -3$	$2a \neq -6$, т.е. $a \neq -3$
то	$\frac{x+4}{x-6}=0$ – дробное уравнение	$\frac{x}{x-6}=0$ – дробное уравнение.	$\frac{x-6}{x-6}=0$ или 1 = 0 – неверное равенство.	$\frac{x-6}{x-6}=0$, т.е. 1 = 0 – неверное равенство	$\frac{x+2a}{x-6}=0$ – дробное уравнение
Тогда	$x + 4 = 0$	$x = 0$	*нет корней*	*нет корней*	$x + 2a = 0$
Ответ:	$x = -4$	$x = 0$	*нет корней*	*нет корней*	$x = -2a$

Частные случаи подобраны так, что представлены различные исходы: при $a = 2$ и $a = 0$ уравнение принимает вид дробного; при $a = -3$ обращается в неверное равенство. В этом случае учитель может обобщить: уравнение с параметром будет дробным, если числитель не равен знаменателю; иначе получим неверное числовое равенство. Табличное представление частных случаев позволяет увидеть методы решения уравнения с параметром (табл. 2). После решения задачи учитель может сформулировать следующие вопросы: при каких значениях параметра данное уравнение имеет единственный корень; не имеет корней? При каком значении параметра корень уравнения равен 9? Как можно выразить параметр а через переменную х? Опишите методику решения дробных уравнений вида $\frac{x-a}{x-b}=0$.

После решения уравнения необходимо правильно записать ответ.

Ответ: если $a = -3$, то корней нет; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, то $x = -2a$.

Используя ответы в частных случаях, можно провести частичную проверку ответа. Подставим $a = 2$ и $a = 0$ в ответ решения: при $a = 2$ получим $x = -2a = -4$; при $a = 0$ получим $x = -2a = 0$, – те же ответы получены при решении частных случаев.

Так можно решать простейшие уравнения и неравенства с параметризацией различных числовых коэффициентов уровня 3.1.

В формировании понятия уравнения и неравенства с параметром важным является форма учебных заданий, их количество и место в учебном пособии. Анализ задач на решение уравнений и неравенств с параметрами, предлагаемых авторами самых популярных учебных пособий для общеобразовательных учреждений в нашей стране, показывает, что с 7-го класса по 9-й представлено: у Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимовича и др. – 27 задач; А.Г. Мордковича, Е.Е. Тульчинской, Т.Н. Мишустиной – 46 задач; С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина – 34; Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова и др. – 31 задача; Ю.Н. Макарычева, Миндюка Н.Г., Муравина К.С. и др. – 17 [1, 2, 3 и др.]. В подавляющем большинстве уравнения и неравенства с параметрами представлены в категории задач повышенной сложности, что изначально ставит психологический барьер в решении задач с параметрами перед большинством учащихся, и примерно половина задач в разделах повторения по главе. Из всех видов задач с параметрами лучше всего представлены задачи на нахождение значений параметра, при которых корни уравнения (неравенство) обладают заданными свойствами. Например, «Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 6x + a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 2x_2$. Найдите a, x_1 и x_2». Данный вид задач относится к виду задач, следующих из «ключевой» задачи «Решите уравнение $x^2 + 6x + q = 0$ с параметром a». Без подробного разбора «ключевой» задачи учащийся не способен построить полной картины решения уравнения с параметром, так как получает лишь одну из логических последовательностей, связывающих отдельные свойства изучаемого уравнения. Поэтому существует потребность в создании единого методического комплекса задач, направленного на более качественное усвоение понятия «уравнение (неравенство) с параметром». Методический комплекс задач включает в себя: выбор «ключевой» задачи (задача 3), решение ее частных случаев различными методами (задачи 1 и 2), формулирование задач-следствий и их решение (задачи 4 и 5), формулирование и решение задач с изменением отдельных условий (задача 6).

Комплекс задач на решение задач с параметром по теме «Квадратичные неравенства»

Задача 1. Решите неравенство $ax^2 + x + a > 0$ при следующих значениях параметра $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$. Какой вид принимает неравенство при данных значениях параметра?

Комментарий. Задача направлена на закрепление связи понятий «неравенство без параметра» и «неравенство с параметром». Первоочередным при ее решении является развитие у учащихся умений определять вид неравенства при различных значениях параметра и выбор соответствующего метода решения. Так, при $a = -1$ и $a = -\frac{1}{2}$ неравенство квадратичное и не имеет решений в действительных числах; при $a = 0$ – линейное, и в ответе бесконечный числовой промежуток, ограниченный снизу; если $a = \frac{1}{2}$, то неравенство квадратичное, в ответе объединение двух бесконечных промежутков, ограниченных сверху и снизу; если $a = 1$ – квадратичное, и в ответе интервал.

Задача 2. Изобразите графики функции $f(x) = ax^2 + x + a$, если a принимает значения –3; –2; –1; $-\frac{1}{4}$; 0; $\frac{1}{4}$; 1; 2; 3. Покажите на графике положительные значения функции при данных значениях параметра.

Комментарий. Цель этой задачи – заложить основы функционально-графических представлений учащихся о выражениях с параметром. Схематично изобразив функцию, необходимо определить отличия и общие свойства графиков при заданных значениях параметра. После показа положительных значений функции необходимо провести сравнительный анализ с условием задачи 1.

Задача 3. Решите неравенство

$$ax^2 + x + a > 0$$

с параметром a.

Комментарий. Ключевая, системообразующая задача для всех задач комплекса. Решать желательно аналитически, проводя функционально-графические интерпретации, опираясь на решения задач 1 и 2.

Задача 4. При каких значениях параметра а неравенство $ax^2 + x + a > 0$ не имеет корней?

Задача 5. При каких значениях параметра а неравенство $ax^2 + x + a > 0$ имеет решением бесконечный промежуток? интервал?

Комментарий. Решение задач 4 и 5 необходимо вычленить из решения задачи 3 и показать, с одной стороны, что такая формулировка и решение являются частью решения неравенства в целом, с другой стороны, логику решения задач без наличия полного решения неравенства.

Задача 6. Решите неравенство

$$ax^2 + x + a \geq 0$$

с параметром a.

Комментарий. Важным вопросом при решении неравенств с параметром является оценка значений корней в зависимости от строгого и нестрогого знака неравенства. Необходимо четко обсудить или даже решить заново неравенство с измененным знаком, провести сравнительный анализ задач 3 и 6.

Представленный методический комплекс обеспечивает подготовку учащихся по решению простейших неравенств с параметризацией двух коэффициентов при неизвестных (уровень 3.2). Подобные комплексы задач также оправдывают себя на начальном этапе решения уравнений (неравенства) *с параметрами,* приведенных к простейшим, путем «сложных» преобразований (уровень 5).

Изложенные в статье аспекты описывают методическую систему обучения решению уравнений и неравенств с параметрами, апробированную при обучении студентов педагогического отделения по специальности «Математика», школьников старших классов при подготовке к ЕГЭ. Ее эффективность подтверждена высокими результатами обучения: за полугодовой курс школьники и студенты научились определять вид уравнения в зависимости от значений с параметра; 80 % решают простейшие уравнения и неравенства с параметрами; 40 % решают задачи с параметрами, приведенные к простейшим путем «сложных» преобразований. При опросе до изучения темы 98 % учащихся и студентов считали, что они не понимают задач с параметрами и принцип выбора метода

решения, не знают методов решения задач с параметром. После изучения курса обучаемые высказали мнение, что в той или иной степени умеют решать уравнения и неравенства с параметрами.

Список литературы

1. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 9-е изд. – М.: Просвещение, 2002. – 255 с.

2. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.; под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 2005. – 256 с.

3. Алгебра: учебное пособие для 7-го класса средней школы / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова ; под ред. А.И. Маркушевича. – М.: Просвещение, 1996. – 239 с.

4. Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – М.: Дрофа, 2007. – 128 с.

5. Фалилеева М.В. Частные случаи при решении уравнений и неравенств с параметрами // Математика. – 2011. – № 14. – С. 4–12.

6. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

References

1. Algebra: Ucheb. dlja 8 kl. obshheobrazvat. uchrezhdenij / Sh.A. Alimov, Ju.M. Koljagin, Ju.V. Sidorov i dr. 9-e izd. M.: Prosveshhenie, 2002. 255 p.

2. Algebra: Ucheb. dlja 7 kl. obshheobrazvat. uchrezhdenij / G.V. Dorofeev, S.B. Suvorova, E.A. Bunimovich i dr.; pod red. G.V. Dorofeeva. M.: Prosveshhenie, 2005. 256 p.

3. Algebra. Uchebnoe posobie dlja 7-ogo klassa srednej shkoly / Ju.N.Makarychev, N.G.Mindjuk , K.S.Muravin, S.B.Suvorova ; pod red. A.I. Markushevicha. M.: Prosveshhenie, 1996. 239 p.

4. Sbornik normativnyh dokumentov. Matematika / Sost. Je.D. Dneprov, A.G. Arkad'ev. M.: Drofa, 2007. 128 p.

5. Falileeva M.V. Chastnye sluchai pri reshenii uravnenij i neravenstv s parametrami // Matematika. 2011. no. 14. pp. 4–12.

6. Jerdniev P.M. Ukrupnenie didakticheskih edinic v obuchenii matematike / P.M. Jerdni-ev, B.P. Jerdniev M.: Prosveshhenie, 1986. 255 p.

Рецензенты:

Шакирова Л.Р., д.п.н., профессор, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Казань;

Салехова Л.Л., д.п.н., профессор, Институт филологии и искусств Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Казань.

Работа поступила в редакцию 12.03.2013.