

УДК 512.55

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОЛУКОЛЬЦА С НЕКОММУТАТИВНЫМ СЛОЖЕНИЕМ

Орлова (Лубягина) И.В.

Вятский государственный университет, Киров, e-mail: lubyagina@yandex.ru

Бесконечные циклические полукольца имеют левое или правое сложение. Выведено правило сложения в конечных циклических полуполях. Цикл конечного циклического полукольца с некоммутативным сложением является циклическим полуполем. Конечное циклическое полукольцо с идемпотентным некоммутативным сложением и поглощающим элементом имеет либо левое, либо правое сложение. Конечное циклическое полукольцо с идемпотентным некоммутативным сложением сводится к конечному циклическому полукольцу с идемпотентным коммутативным сложением и поглощающим элементом и конечному циклическому полуполю. Приведены условия, при которых конечное циклическое полукольцо с неидемпотентным некоммутативным сложением сводится к подобному полукольцу с поглощающим элементом и циклическому полуполю. Доказаны необходимые условия для сложения в конечных циклических полукольцах с неидемпотентным некоммутативным сложением и коротким хвостом. С помощью программы, написанной на языке Си, получены такие полукольца небольшого порядка. Имеется достаточное условие на сложение в мультипликативной циклической полугруппе, превращающее её в циклическое полукольцо с неидемпотентным некоммутативным сложением. Приводится критерий для определения того, является ли конечная мультипликативная циклическая полугруппа с коротким хвостом и заданным на ней сложением полукольцом.

Ключевые слова: циклическое полукольцо, циклическое полуполе, некоммутативность

CYCLIC SEMIRINGS WITH NONCOMMUTATIVE ADDITION

Orlova (Lubyagina) I.V.

Vyatka State University, Kirov, e-mail: lubyagina@yandex.ru

Cyclic semiring is an unexplored algebraic structure. Cyclic semirings are of two types: with commutative addition (traditional) and noncommutative addition. Semirings of the first type are investigated by Bestuzhev A.S. We study only the cyclic semirings with noncommutative addition. Cyclic semirings have idempotent or non-idempotent addition. Infinite cyclic semirings have only the left or right addition, that is idempotent. Finite cyclic semirings with idempotent noncommutative addition are fully understood and here described. Weinert had found that a finite semifield is isomorphic to the direct product of two subsemifields, one of which has left addition, another has right addition. We got the formula of an addition in a finite cyclic semifield. The cycle of a finite cyclic semiring with noncommutative addition is the cyclic semifield. A finite cyclic semiring with idempotent noncommutative addition and absorbing element have left or right addition. A finite cyclic semiring with idempotent noncommutative addition is reduced to the finite cyclic semiring with idempotent commutative addition and absorbing element and the cyclic semifield. Under certain conditions a finite cyclic semiring with nonidempotent noncommutative addition is reduced to the similar semiring with absorbing element and the finite cyclic semifield. We have necessary and some sufficient conditions for addition in finite cyclic semirings with nonidempotent noncommutative addition and short tail. We developed the computer program for finding above semirings.

Keywords: cyclic semiring, cyclic semifield, noncommutativity

Абстрактное понятие полукольца появилось в 30-е годы XX века и в последние десятилетия теория полуколец в связи с широким её применением активно развивается. В самом общем понимании под полукольцом S подразумевают две полугруппы (аддитивную и мультипликативную), связанные законом дистрибутивности умножения относительно сложения с обеих сторон. Именно такое определение полукольца (или ассоциативной алгебры) было дано Вандивером [5] в 1934 году. В той же работе [5] Вандивер упомянул о возможности рассмотрения полуколец с некоммутативным сложением. Мы будем рассматривать полукольца только с некоммутативным сложением. Под циклическим полукольцом будем понимать полукольцо с циклической мультипликативной полугруппой.

Циклическое полукольцо является неизученной алгебраической структурой. Наибо-

лее известными циклическими объектами, близкими к циклическим полукольцам, являются циклические или моногенные полугруппы, циклические группы, циклические кольца [4] (аддитивная группа кольца является циклической), циклические почтикольца [3] (аддитивная группа почтикольца является циклической).

Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо типа (k, n) с некоммутативным сложением и циклом C . В силу предложений 1 и 2 [6] будем изучать циклические полукольца с единицей, но без нуля.

Строение бесконечных циклических полуколец с коммутативным сложением известно [2]. Конечные циклические полукольца с коммутативным сложением изучает Бестужев А.С. [1].

Теорема 1. Бесконечные циклические полукольца с некоммутативным сложением имеют левое или правое сложение.

Конечные полутела изучены Вейнертом [7]. Вейнерт установил, что конечное полутело изоморфно прямому произведению двух подполутел, одно из которых с левым сложением, а другое с правым сложением. Используя теорему Вейнерта, получено правило сложения в конечных циклических полуполях:

Предложение 1. Пусть $C = (c)$ – циклическое полуполе порядка n , $|C + 1| = m$, $|1 + C| = h$. Тогда сложение в C выполняется по формуле (для любых $i_1, j_1, i_2, j_2 \in N_0$):

$$c^{hi_1 + mj_1} + c^{hi_2 + mj_2} = c^{hi_1 + mj_2}.$$

Теорема 2. Цикл C конечного циклического полукольца $S = (a)$ типа (k, n) с некоммутативным сложением является циклическим полуполем с образующим элементом a^{nl+1} и единицей a^{nl} для некоторого $l \in N_0$ такого, что $nl \geq k > n(l-1)$.

Циклические полукольца с некоммутативным сложением могут иметь **идемпотентное** и **неидемпотентное** сложение. Рассмотрим сначала полукольца с идемпотентным сложением.

Теорема 3. Всякое конечное циклическое полукольцо $S = (a)$ типа (k, n) с идемпотентным некоммутативным сложением и с поглощающим элементом a^k имеет либо левое сложение, либо правое сложение.

Бинарное отношение $\sim$, заданное на полукольце S формулой $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in C$ или $x = y$, является конгруэнцией. Факторполукольцо $S/\sim$ является циклическим полукольцом с поглощающим элементом $[a^k]_{\sim}$.

Любое конечное циклическое полукольцо с идемпотентным некоммутативным сложением сводится к подобному полукольцу с поглощающим элементом и конечному циклическому полуполу:

Теорема 4. Пусть в конечном циклическом полукольце $S = (a)$ типа (k, n) , $k \geq 1$, $n \geq 2$, сложение не коммутативно, не левое и не правое. Тогда:

1) $1 + a^{nl} = a^{nl} + 1 = a^{nl}$, где a^{nl} – единица цикла C полукольца S для такого натурального l , что $n(l-1) < k \leq nl$;

2) множество $T = \{1, a^n, a^{2n}, \dots, a^{nl}\}$, является циклическим подполукольцом в полукольце S , имеющим коммутативное сложение и поглощающий элемент a^{nl} .

3) для любых $r, s \in N_0$, где $r - s \not\equiv 0 \pmod{n}$, выполняется:

$$a^r + a^s = a^{(r+nl)} + a^{(s+nl)}.$$

В следующей теореме показываются существование и единственность полукольца со структурой, описанной в теореме 4.

Теорема 5. Пусть даны натуральные числа k, n, l такие, что $n \geq 2$ и $n(l-1) < k \leq nl$, произвольное циклическое полукольцо

$T = \{1, b, b^2, \dots, b^l\}$ с идемпотентным коммутативным сложением и с поглощающим элементом b^l с условием $1 + b^l = b^l$, и некоторое циклическое полуполе $C = \{1, c, c^2, \dots, c^{(n-1)}\}$. Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма конечное циклическое полукольцо $S = (a)$ типа (k, n) с идемпотентным некоммутативным сложением, не левым и не правым такое, что его подполукольцо $\{1, a^n, a^{2n}, \dots, a^{nl}\}$ изоморфно T , а его цикл $\{a^k, a^{(k+1)}, \dots, a^{(k+n-1)}\}$ изоморфен C .

Пусть теперь $S = (a)$ – циклическое полукольцо типа (k, n) с **неидемпотентным** некоммутативным сложением и циклом C . Обозначим $m = |C + e|$, $h = |e + C|$.

Конечное циклическое полукольцо с неидемпотентным некоммутативным сложением сводится к подобному полукольцу с поглощающим элементом и конечному циклическому полуполу при некоторых условиях.

Пусть произвольные натуральные числа r и s имеют разложения $r = hi_1 + mj_1$, $s = hi_2 + mj_2$, для некоторых целых чисел i_1, j_1, i_2, j_2 .

Теорема 6. Пусть даны произвольные натуральные числа k и n , произвольное циклическое полукольцо $S' = \{1, a, a_2, \dots, a_k\}$ с неидемпотентным некоммутативным сложением и поглощающим элементом a^k , некоторое циклическое полуполе $C' = \{e = c^n, c, c^2, \dots, c^{(n-1)}\}$ порядка n , где $|C' + e| = m$, $|e + C'| = h$. Циклическое полукольцо $S = (a)$ типа (k, n) , факторполукольцо которого по конгруэнции $\sim$ совпадает с полукольцом S' , то есть $S/\sim = S'$, а цикл C полукольца S изоморфен полуполу C' , то есть $\langle C, +, \cdot \rangle \cong \langle C', +, \cdot \rangle$, существует тогда и только тогда, когда в S' для любых $r, s \in N_0$ выполняется условие:

$$a^r + a^s = a^t,$$

где $t \equiv hi_1 + mj_2 \pmod{n}$; $t > \max\{r, s\}$.

Предложение 2. Хвост T полукольца S из теоремы 6 совпадает с $S' \setminus \{a^k\}$, то есть $\langle T, +, \cdot \rangle = \langle S' \setminus \{a^k\}, +, \cdot \rangle$, только в случае $|C'| = 1$.

Рассмотрим циклическое полукольцо $S = (a)$ типа (k, n) с неидемпотентным некоммутативным сложением и коротким хвостом ($k \leq n$).

Пусть натуральное число z такое, что $0 \leq z \leq k + n - 1$ имеет разложения:

$$z = hi_1 + mj_1, \quad (1)$$

где $1 \leq mj_1 \leq n$;

$$z = hi_2 + mj_2, \quad (2)$$

где $1 \leq hi_2 \leq n$.

Теорема 7. Если полукольцо $S = (a)$ произведению подполупол $C + e$ и $e + C$ порядков m и h соответственно, то выполняются равенства:

$$(a) \quad 1 + a^z = \begin{cases} a^{mj_1 + n}, & \text{если } mj_1 - hi_1 < k \\ a^{mj_1} \text{ (I) или } a^{mj_1 + n} \text{ (II)}, & \text{в иных случаях,} \end{cases}$$

где z удовлетворяет (1).

$$(б) \quad a^z + 1 = \begin{cases} a^{hi_1 + n}, & \text{если } hi_1 - mj_1 < k \\ a^{hi_1} \text{ (I) или } a^{hi_1 + n} \text{ (II)}, & \text{в иных случаях,} \end{cases}$$

где z удовлетворяет (2).

Количество полуколец типа (k, n) с неидемпотентным некоммутативным сложением при $k \leq n$

(k, n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	2	2	2	2	4	2	2	2	4	2	4
2		2	2	2	2	4	2	2	2	4	2	4
3			2	2	2	4	2	2	2	4	2	4
4				2	2	6	2	2	2	4	2	4
5					2	10	2	2	2	4	2	6
6						6	2	2	2	10	2	6
7							2	2	2	18	2	10
8								2	2	10	2	6
9									2	18	2	18
10										10	2	50
11											2	34
12												18

С помощью программы, написанной на языке Си, в которой учтены необходимые условия, сформулированные в теореме 7, по заданным числам m, h и k можно находить полукольца $S = (a)$ типа (k, n) с неидемпотентным некоммутативным сложением, где $n = m \cdot h$, $|C + e| = m$, $|e + C| = h$. В таблице приведено количество полуколец типа (k, n) с неидемпотентным некоммутативным сложением для $n \leq 12$.

Найденные полукольца показывают, что теорема 7 дает лишь необходимые условия существования циклических полуколец с неидемпотентным некоммутативным сложением и коротким хвостом.

Следующая теорема дает достаточное условие на сложение в мультипликативной циклической полугруппе, превращающее ее в циклическое полукольцо с неидемпотентным некоммутативным сложением:

Теорема 8. Пусть дана циклическая полугруппа $S = (a)$ типа (k, n) , $n \geq 2$. Тогда для любых натуральных чисел m, h и l , таких, что $m \cdot h = n$, $(m, h) = 1$ и $nl \geq k > n(l - 1)$, на S существует неидемпотентное некоммутативное сложение, определяемое равенствами:

$$(a) \quad 1 + a^z = a^{mj_1 + nl}$$

где z удовлетворяет (1),

$$(б) \quad a^z + 1 = a^{hi_2 + nl}$$

где z удовлетворяет (2), превращающее S в циклическое полукольцо.

Теорема 9. В циклическом полукольце $S = (a)$ типа (k, n) , где $k \leq n$, с неидемпотентным некоммутативным сложением сумма любых трех элементов лежит в цикле C .

Теорема 10. Пусть $S = (a)$ – циклическая полугруппа типа (k, n) , где $k \leq n$, со сложением, заданным правилами (а) и (б) из теоремы 7 и удовлетворяющим закону дистрибутивности. Тогда для того, чтобы S было полукольцом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (для любых $r, s \in N_0$):

$$(a) (a^r + 1 \in C, 1 + a^s \notin C) \Rightarrow a^r + (1 + a^s) \in C;$$

$$(б) (a^r + 1 \notin C, 1 + a^s \in C) \Rightarrow (a^r + 1) + a^s \in C;$$

$$(в) \quad 1 + a^r \in C \Rightarrow 1 + (a^r + a^s) \in C;$$

$$(г) \quad 1 + a^r \notin C \Rightarrow (1 + a^r) + a^s \in C;$$

$$(д) \quad a^s + 1 \in C \Rightarrow (a^r + a^s) + 1 \in C;$$

$$(е) \quad a^s + 1 \notin C \Rightarrow a^r + (a^s + 1) \in C.$$

Для полного описания циклических полуколец с некоммутативным сложением осталось описать такие полукольца с неидемпотентным сложением и поглощающим элементом.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Е.М. Вечтому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Бестужев А.С. О строении конечных циклических полуколец // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. – 2010. – Вып. 6. – С. 143–148.
2. Вечтомов Е.М. Введение в полукольца: пособие для студентов и аспирантов. – Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. – 44 с.
3. Clay J.R. The near-rings on a finite cycle group // The American Mathematical Monthly. – 1964. – Vol. 71. – № 1. – P. 47–50.
4. Maurer I.Gy. and Vincze J. Despre Inele Ciclice // Studia Universitatis Babes-Bolyai. Series Mathematica-Physica. – 1964. – Vol. 9. – № 1. – P. 25–27.
5. Vandiver H.S. Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – Vol. 40. – № 12. – P. 914–920.
6. Vechtomov E.M., Lubyagina I.V. Cyclic semirings with idempotent noncommutative addition // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 185. – Issue 3. – P. 367–380.
7. Weinert H. J. Zur Theorie der HalbFastkörper // Stud. Sci. Math. Hung. – 1981. – Vol. 16. – P. 201–218.

References

1. Bestuzhev A.S. O stroenii konechnykh ciklicheskh polukolec // Vestnik VjatGGU. Informatika. Matematika. Jazyk, 2010, issue 6, pp. 143–148.
2. Vechtomov E.M. Vvedenie v polukol'ca [Introduction to semirings]. Kirov, Publ. VGPU, 2000. 44 p.
3. Clay J.R. The near-rings on a finite cycle group // The American Mathematical Monthly. 1964. Vol. 71. no. 1. pp. 47–50.
4. Maurer, I. Gy. and Vincze, J. Despre Inele Ciclice // Studia Universitatis Babes-Bolyai. Series Mathematica-Physica. 1964. Vol. 9. no. 1. pp. 25–27.
5. Vandiver H.S. Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. no. 12. pp. 914–920.
6. Vechtomov E.M., Lubyagina I.V. Cyclic semirings with idempotent noncommutative addition // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 185. Issue 3. pp. 367–380.
7. Weinert H. J. Zur Theorie der HalbFastkörper // Stud. Sci. Math. Hung. 1981. Vol. 16. pp. 201–218.

Рецензенты:

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой алгебры и дискретной математики, Вятский государственный гуманитарный университет, г. Киров;

Чермных В.В., д.ф.-м.н., профессор, доцент кафедры алгебры и дискретной математики, Вятский государственный гуманитарный университет, г. Киров.

Работа поступила в редакцию 15.01.2013.