

УДК 004.942

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ РАССЕЙЯНИЯ

Поршнеv С.В., Копосов А.С.

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Екатеринбург, e-mail: alexkopas@gmail.com

Обсуждаются результаты аналитического анализа свойств случайных блужданий броуновской частицы в ограниченной области рассеяния. Рассмотрена модель статистического распределения случайной последовательности, основанная на работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского. Показаны формулы аналитического выражения плотности распределения в случае односторонней ограниченной области рассеяния и в случае двусторонней ограниченной области рассеяния. Получены зависимости среднего значения смещения и квадрата смещения от числа шагов Монте-Карло для различных значений интервала рассеяния. Показано, что зависимости среднего значения смещения и квадрата смещения от времени при больших временах блужданий асимптотически стремятся к некоторому конечному значению, определяемому размером области рассеяния. Получена зависимость квадрата смещения броуновской частицы от размера области рассеяния. Сформулированы рекомендации для определения начального вектора параметров при использовании численных методов для нахождения параметров распределения.

Ключевые слова: броуновское движение, броуновская частица, случайные блуждания

ANALYTICAL RESEARCH OF RANDOM WALK FEATURES OF BROWNIAN PARTICLE IN A BOUNDED SCATTERING REGION

Porshnev S.V., Kopusov A.S.

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Institute of Radioelectronics and Information Technologies – RTF, Ekaterinburg, e-mail: alexkopas@gmail.com

We have discussed the results of analytical analysis of random walk features of Brownian particle in a bounded scattering region. This article considers the model of statistical distribution of random sequence based on papers of A. Einstein and M Smoluhovsky. We have showed analytical formulas of probability density function in case of one-sided bounded scattering region and in case of double-sided scattering region. The Monte-Carlo steps number dependencies of mean displacement and square displacement for different scattering region sizes are derived. We have showed that steps number dependencies of mean displacement and square displacement in case of large random walk time are tending asymptotically to some finite value, that depends on a size of a bounded scattering region. The dependence of Brownian particle square displacement from scattering region size is derived. We have stated the recommendations for definition of initial vector of parameters when using numerical methods for finding parameters of distribution.

Keywords: Brownian motion, Brownian particle, random walk

Нормальное распределение случайной величины имеет неограниченную область рассеяния. В то же время область значений случайных величин, анализ которых приходится проводить в естествознании, технике и экономике, оказывается конечной. Как следствие, распределения данных случайных величин отличаются от идеализированной модели с неограниченной областью рассеяния. В качестве примеров физических характеристик с ограниченной областью рассеяния можно привести плотности

углей, изменяющуюся в диапазоне от ρ_{\min} до некоторого максимального значения ρ_{\max} , время безотказной работы группы однотипных приборов, изменяющееся в диапазоне от некоторого минимального значения T_{\min} до некоторого максимального T_{\max} и т.д.

Для описания распределений обсуждаемых случайных величин известны два альтернативных подхода. Первый подход основан на описании распределения случайной величины с помощью усеченных функций нормального распределения [1]:

$$F'_N(x; \mu, \sigma, x_{\min}, x_{\max}) = \int_{x_{\min}}^x \varphi'(\xi; \mu, \sigma, x_{\min}, x_{\max}) d\xi, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad (1)$$

$$\text{где } \varphi'_N(x; \mu, \sigma, x_{\min}, x_{\max}) = \frac{1}{\sigma} \frac{\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma}\right)};$$

$\varphi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения $N(0, 1)$;

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi - \text{функция Ла-}$$

пласа; μ, σ – параметры исходного нормального распределения; $x_{\min} < x_{\max}$ – точки усечения.

Во втором подходе, базирующемся на работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского

$$f_{LIM}(x; x_0, \sigma, l) = A \left[\varphi(x; x_0, \sigma, l) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+1}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) \right], \quad (2)$$

где x_0 – положение центра рассеяния в системе координат с началом в центре отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$; σs – СКО случайного процесса при отсутствии ограничения; $l = x_{\max} - x_{\min}$ – размах области рассеяния; A – нормировочный коэффициент, определяемый из условия

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_{LIM}(\xi; x_0, \sigma, l) d\xi = 1; \quad (3)$$

$$\varphi(x; x_0, \sigma, l) = \exp\left[-(x - x_0)^2 / 2\sigma^2\right];$$

$$\varphi_{2n+1}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) = \exp\left[-(x - x_{2n+1}^{\pm})^2 / 2\sigma^2\right];$$

по теории броуновского движения [7], модель статистического распределения случайной последовательности строится как распределение конечного состояния некоторого случайного процесса без последствия с ограниченной областью рассеяния [3]. Его плотность распределения, являющаяся линейной комбинацией плотностей распределений мнимых источников (рис. 1), описывается следующим выражением [4]:

$$\varphi_{2n}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) = \exp\left[-(x - x_{2n}^{\pm})^2 / 2\sigma^2\right];$$

здесь $x_{2n+1}^{\pm}, x_{2n}^{\pm}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x_{2n}^{\pm} &= \pm 4nl + x_0; \\ x_{2n+1}^{\pm} &= \pm (4n + 2)l - x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

соответственно функция распределения

$$F_{LIM}(x; x_0, \sigma, l) = \int_{x_{\min}}^x f_{LIM}(\xi; x_0, \sigma, l) d\xi. \quad (5)$$

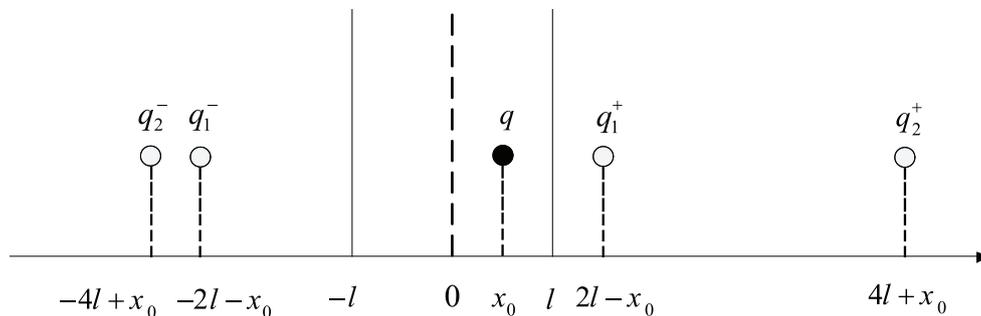


Рис. 1. К вычислению координат фиктивных источников

Результаты сравнительного анализа распределений (1), (2), проведенные в работе [4], показывают, что при использовании математической модели (1) для описания функции распределения случайной последовательности с ограниченной областью блуждания в зависимости от значений параметров математической модели ошибка может достигать 10%. В этой связи для аппроксимации распределений случайных величин, область значений которых из физических соображений является ограниченной, следует использовать математическую модель (2), зависящую от следующих 4-х параметров: $x_0, \sigma, l = x_{\max} - x_{\min}$. Кроме того, при практическом использовании (2) в список параметров модели с неизбежностью приходится вводить еще один параметр – количество

мнимых источников N_p , используемых в (2), от которого также будет зависеть точность аппроксимации функции распределения. Таким образом, фактически математическая модель (2) является 5-параметрической.

Напомним, что существование решения задачи аппроксимации распределения случайной последовательности обеспечивается теоремой Гливленко [1], в соответствии с которой эмпирическая функция распределения $F_N(x)$ равна

$$F_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq x_1, \\ \frac{k}{n}, & \text{if } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 1, & \text{if } x > x_n. \end{cases}$$

любой упорядоченной по возрастанию совокупности случайных величин $x_i, i = 1, N$:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq x_N,$$

при $N \rightarrow \infty$ сходится, вообще говоря, к неизвестной истинной интегральной функции распределения $F(x, \bar{a})$, \bar{a} – вектор парамет-

тров. Для случайной величины с ограниченной областью рассеяния

$$F(x, \bar{a}) = F_{LIM}(x; \bar{a}), \bar{a} = (x_0, \sigma, x_{\min}, x_{\max}, N_f).$$

Традиционно, вектор параметров \bar{a} находят как решение одной из следующих задач:

$$\bar{a} = \arg \min (\Phi(F_{LIM}(x_k, \bar{a}) - F_N(x_k))), k = \overline{1, N}; \quad (6)$$

$$\bar{a} = \arg \max (\Phi(F_{LIM}(x_k, \bar{a}) - F_N(x_k))), k = \overline{1, N}, \quad (7)$$

где Φ – тот или иной функционал, вид которого зависит от выбранного критерия близости функций $F_{LIM}(x_k, \bar{a})$ и $F_N(x_k)$. Например, для решения задачи (6) можно использовать метод максимального правдоподобия, задачи (7) – метод наименьших квадратов и т.д.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев решение задач (6), (7) сводится к решению некоторой, вообще говоря, нелинейной системы уравнений, которое может быть найдено только численно. При этом точность оценки вектора параметров \bar{a} оказывается напрямую зависящей от удачного выбора начального приближения \bar{a}^* и области, в которой осуществляется поиск возможных значений координат вектора. В этой связи разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска возможных значений параметров в задаче оценки параметров функции распределения случайной величины с ограниченной областью рассеяния является актуальной.

В статье обсуждаются результаты аналитического исследования свойств случайных блужданий броуновской частицы в ограниченной области рассеяния, позволяющие установить связь между размерами области случайных блужданий и параметрами функции распределения.

Свойства случайных блужданий с неограниченной областью рассеяния

Предваряя обсуждения особенностей случайных блужданий в ограниченной области, напомним, следуя [5], основные свойства случайных блужданий с неограниченной областью рассеяния. В данной одномерной модели случайных блужданий частицы предполагается, что частица в начальный момент времени расположена в точке с координатой $x_0 = 0$. Далее на каждом шаге частица совершает перемещение на величину шага с вероятностью p влево или с вероятностью $q = 1 - p$ вправо. Тогда вероятность нахождения частицы через n

шагов в точке с координатой $x = m \cdot P_n(m)$, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!} p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}, \quad (8)$$

где $n + m$ $n - m$ – число элементарных смещений (шагов) вправо и влево соответственно. (Здесь, если n – четно, то m тоже четно, и, наоборот, если n – нечетно, то m тоже нечетно). При $p = q = \frac{1}{2}$ выражение (8) принимает следующий вид:

$$P_n(m) = C_n^{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) с физической точки зрения могут быть истолкованы следующим образом [2]. Предположим, что в начальный момент времени в точке $x = 0$ имелось большое количество частиц (ансамбль частиц). Далее частицы начинают перемещаться под действием случайных толчков независимо друг от друга. Тогда (8), (9) есть доля частиц, оказавшихся на расстоянии m от начала отсчета.

При больших значениях n выражение (9) в соответствии с локальной теоремой Муавра-Лапласа аппроксимируется следующим выражением:

$$P\{x = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}, \quad (10)$$

где n – число шагов, совершенных частицей.

Из (10) видно, что при достаточно большом числе шагов распределение координат частицы, совершающей случайные блуждания, описывается нормальным законом распределения.

Зависимость координаты частицы, усредненной по ансамблю частиц, совершающих независимые перемещения, от номера шага перемещения n

$$\langle x \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i]_n,$$

где $i = \overline{1, N}$, N – число частиц в ансамбле, для случая $x = 0$ описывается выражением [6]

$$\langle x \rangle = (p - q)n, \quad (11)$$

для случая $x \neq 0$ описывается выражением

$$\langle x \rangle = x_0 + (p - q)n. \quad (12)$$

Зависимость квадрата смещения частицы, усредненной по ансамблю частиц, совершающих независимые перемещения, от номера шага перемещения n

$$\langle x^2 \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2]_n,$$

где $i = \overline{1, N}$, N – число частиц в ансамбле, для случая $x = 0$ описывается выражением [6]

$$\langle x^2 \rangle_n = 4pqn, \quad (13)$$

для случая $x \neq 0$ описывается выражением

$$\langle x^2 \rangle_n = x_0^2 + 4pqn. \quad (14)$$

Если $p = q = \frac{1}{2}$, выражения (11)–(14), соответственно, принимают следующий вид:

$$\langle x \rangle_n = 0; \quad (15)$$

$$\langle x \rangle_n = x_0; \quad (16)$$

$$\langle x^2 \rangle = n; \quad (17)$$

$$\langle x^2 \rangle = x_0^2 + n. \quad (18)$$

Из выражений (13), (14), (17), (18) видно, что дисперсия случайного блуждания зависит линейно от числа шагов частицы, совершающей случайные блуждания, что соответствует результату, полученному А. Эйнштейном для броуновского движения, который показал [7], что дисперсия линейно зависит от времени t , что эквивалентно, в данном случае, числу случайных шагов n .

Свойства случайных блужданий в области, ограниченной с одной стороны

Рассмотрим, следуя [5], свойства случайных блужданий в области, ограниченной справа абсолютно упругой отражающей стенкой, расположенной в точке x_{\max} . Присутствие стенки обеспечивает с вероятностью, равной единице, что при следующем толчке частица будет двигаться в направлении, противоположном направлению движения на предыдущем шаге. Изобразим положение частицы на плоскости (x, t) (рис. 2).

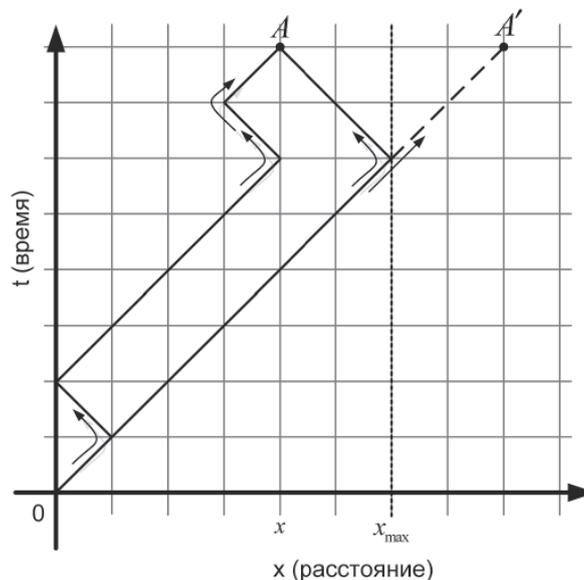


Рис. 2. Случайное блуждание частицы с одной отражающей стенкой

Так как при каждом толчке частица перемещается на одну единицу «вверх» и с вероятностью q на единицу вправо или с вероятностью p влево, то траектория частицы на плоскости (x, t) представляет собой ломаную линию. Если $x = x_{\max}$, то при очередном толчке частица сдвинется на единицу влево и окажется в точке $x = x_{\max} - 1$.

Для подсчета вероятностей $P(x = t)$ мысленно откинем стенку и разрешим частице двигаться свободно. Идеализированные пути, приводящие частицу в симметрично расположенные относительно стенки $x = x_{\max}$ точки A и A' , представлены на рис. 2. Из рис. 2 видно, что для попадания в действительности частицы в точку A ,

необходимо и достаточно, чтобы при движении в области без отражающей стенки частица достигла либо точки A , либо точки A' . Но вероятность попасть в точку A в ситуации без отражающей стенки вычисляется для случая $q \neq p$ в соответствии с (8),

а для случая $p = q = \frac{1}{2}$ в соответствии с (9).

Аналогично, вероятность попасть в точку A' с абсциссой $2x_{\max} - m$ равна

$$P_n(m, x_{\max}) = P_n(x = m) + P_n(x = 2x_{\max} - m). \quad (19)$$

При больших значениях n при $p = q = \frac{1}{2}$ выражение (19) в соответствии с локальной теоремой Муавра-Лапласа аппроксимируется следующим выражением:

$$P_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+(m-x_0)}{2}\right)! \left(\frac{n-(m-x_0)}{2}\right)!} p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} + \frac{n!}{\left(\frac{n+(2x_{\max}-(m-x_0))}{2}\right)! \left(\frac{n-(2x_{\max}-(m-x_0))}{2}\right)!} p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}; \quad (21)$$

для случая $p = q = \frac{1}{2}$:

$$P_n(m) = C_n^{\frac{n+m-x_0}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_n^{\frac{n-(2x_{\max}-(m-x_0))}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (22)$$

Свойства случайных блужданий в ограниченной области рассеяния

Добавление дополнительной отражающей стенки в точке $x = x_{\min}$ приведет к появлению бесконечной системы, состоящей из

$$P\{x = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(2x_{\max}-m)^2}{2n}}.$$

Из (20) видно, что в рассматриваемом случае вероятность представляет сумму двух нормальных распределений: одного расположенного в точке $x = m$, второго – в точке $x = 2x_{\max} - m$. Соотношения (8), (9) с физической точки зрения могут быть истолкованы следующим образом [2]. Предположим, что в начальный момент времени в точках $x = 0$, $x = 2x_{\max} - m$ имелось большое количество частиц (ансамбль частиц). Далее частицы начинают перемещаться под действием случайных толчков независимо друг от друга. Тогда (19), (20) есть доля частиц, оказавшихся на расстоянии m от начала отсчета.

Для случая $x \neq 0$ (19) и $q \neq p$ (20) принимают следующий вид:

источников частиц (см. рис. 1), координаты которых вычисляются в соответствии с (4), поэтому вероятность нахождения частицы в точке с координатой $x = m$ можно вычислить по следующей формуле:

$$P_n(m; x_0, x_{\min}, x_{\max}) = P_n(x = m) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^{\pm}(x = m - x_0 - x_{2n+1}^{\pm}) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}^{\pm}(x = m - x_0 - x_{2n}^{\pm}), \quad (23)$$

где $P_n(x = m)$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^{\pm}(x = m - x_0 - x_{2n+1}^{\pm}) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}^{\pm}(x = m - x_0 - x_{2n}^{\pm})$$

вычисляются в соответствии с (8), (9).

Отметим, что координаты x_{2n+1}^{\pm} , x_{2n}^{\pm} вычисляются в соответствии с (4) в системе координат с центром в середине области рассеяния (локальная система координат)

(см. рис. 1). Поэтому при задании значений координат отражающих границ и координаты центра рассеяния в системе координат с центром в точке $x = 0$ (абсолютная система координат) нужно пересчитывать координаты x_0 , x_{\min} , x_{\max} , m из абсолютной в локальную систему координат по следующим очевидным формулам:

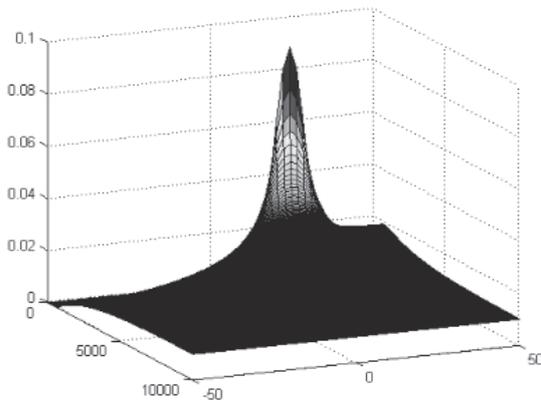
$$x_0^{local} = x_0 - dx; \quad x_{\min}^{local} = -l;$$

$$x_{\max}^{local} = l; \quad m^{local} = m - dx,$$

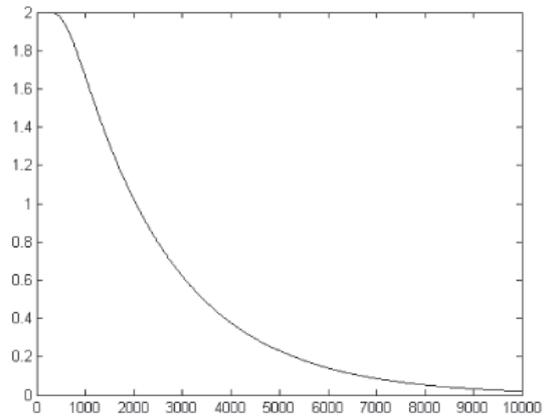
где $l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$; $dx = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$.

Рассмотрим результаты расчетов функции распределения, а также зависимости

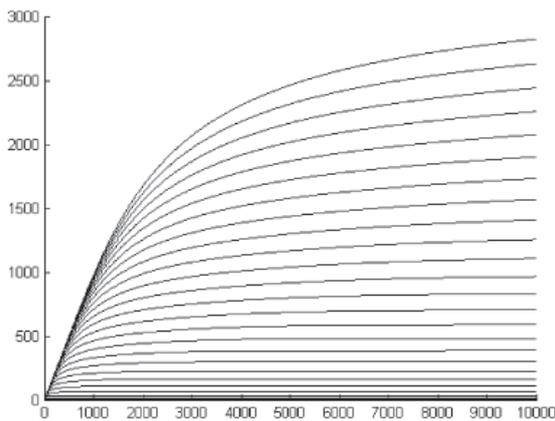
$\langle x \rangle_{4000}$, $\langle x^2 \rangle_{4000}$ для различных значений x_0 , x_{\min} , x_{\max} , представленные на рис. 3.



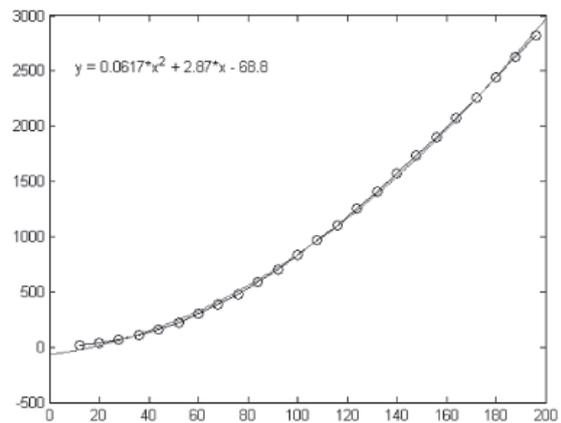
а) Поверхность, задаваемая функцией $N \cdot P_n(m)$: $x_0 = 0$; $x_{\min} = -50$; $x_{\max} = 50$; $l = 50$; $m = x_{\min}^2, x_{\min+2}^2, x_{\max}^2$; $n = 50, 60, \dots, 10000$



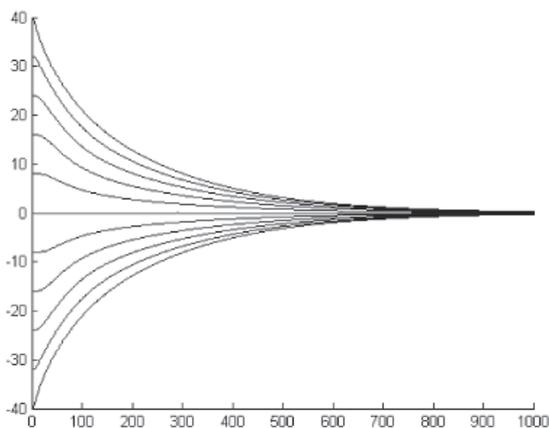
б) Зависимость $\frac{\max(P_n(m)) - \min(P_n(m))}{\max(P_n(m)) + \min(P_n(m))}$ от $n = 1, 10000$



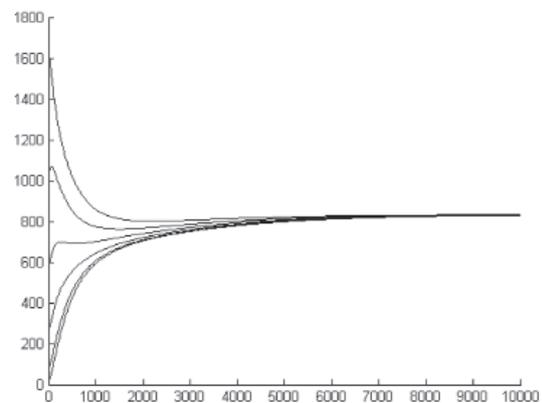
в) Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$: $x_0 = 0$; $|x_{\min}| = |x_{\max}| = l$, $l = 6, 14, \dots, 200$; $n = 1, 10000$



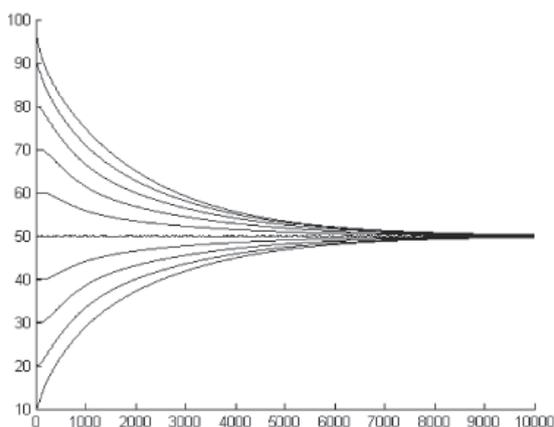
г) Зависимость от $2l$: $x_0 = 0$; $x_1 = -40$



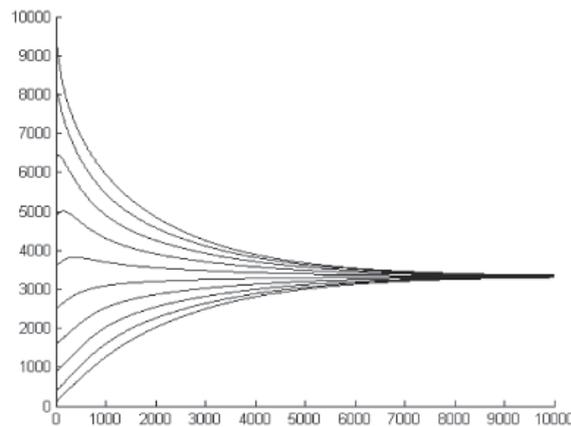
д) Зависимость $\langle x \rangle_n$: $x_0 = -40, -30, \dots, 40$; $x_{\min} = -x_{\max}$; $|x_1| = |x_2| = L/2 = 50$; $n = 1, 10000$



е) Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$: $x_0 = -40, -30, \dots, 40$; $n = 1, 10000$



ж) Зависимость $\langle x \rangle_n$: $x_0 = 10, 20, \dots, 100$
 $x_{\min} = 0, x_{\max} = 100, L/2 = 50, n = 1, 10000$



з) Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$: $x_0 = 10, 20, \dots, 100$
 $x_{\min} = 0, x_{\max} = 100, L/2 = 50, n = 1, 10000$

Рис. 3. Результаты исследования случайных блужданий с ограниченной областью рассеяния

Из рис. 3 видно, что случайные блуждания в ограниченной области рассеяния имеют следующие свойства:

1. Для случая $x_0 = 0$ и $x_2 = -x_1$ плотность распределения при $n \rightarrow \infty$ стремится к равномерному закону распределения с центром в точке $x_0 = 0$ и областью рассеяния $2l = x_2 - x_1$ (рис. 3,а, б).

2. Для случая $x_0 = 0$ и $x_2 = -x_1$ зависимость $\langle x^2 \rangle_n$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому предельному значению, определяемому размером области рассеяния $2l$ (рис. 3,в, г).

3. Зависимость $\langle x \rangle_n$ при $n \rightarrow \infty$ вне зависимости от координаты начальной точки x_0 стремится к равномерному закону распределения с областью рассеяния $2l = x_2 - x_1$ и средним значением

$$\bar{x} = x_1 + (x_2 - x_1)/2 = (x_1 + x_2)/2$$

(рис. 3,д, ж).

4. Зависимость $\langle x^2 \rangle_n$ при $n \rightarrow \infty$ вне зависимости от координаты x_0 стремится к некоторому предельному значению, определяемому размером области рассеяния $2l$ (рис. 3,е,з).

5. Для нахождения предельного значения зависимость $\langle x^2 \rangle_n$ при $n \rightarrow \infty$ следует использовать зависимость, представленную на рис. 3,г.

Заключение

Существуют принципиальные отличия между случайными блужданиями с неограниченной областью рассеяния, у которых средний квадрат смещения броуновской

частицы, линейной неограниченно, увеличивается с течением времени, и ограниченной областями рассеяния, у которых данная величина стремится к некоторому предельному значению, зависящему от квадрата размера области случайных блужданий и независящему от точки x_0 .

Результаты проведенных исследований позволяют дать следующие рекомендации для использования на практике математической модели (5) в задаче аппроксимации распределения случайной последовательности $x_i, i = 1, M$.

1. Нулевое приближение параметра x_0 нужно выбирать из отрезка $[\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}]$, где $\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}$ – минимальное и максимальное значения случайной последовательности $x_i, i = 1, M$.

2. Область поиска истинного значения параметра x_0 следует ограничить отрезком $[\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max}]$.

3. Нулевое приближение параметра $\tilde{\sigma}$ нужно оценивать по экспериментальному значению области рассеяния $2L = \tilde{x}_{\max} - \tilde{x}_{\min}$ и зависимости $\langle x^2 \rangle_n = f(l)$, представленной на рис. 3,г.

4. Область поиска истинного значения параметра σ следует ограничить отрезком $[0, \tilde{\sigma}]$.

Список литературы

1. Бородачев Н.А. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Н.А. Бородачев, Р.М. Абрашитов, И.М. Веселова. – М.: Машиностроение, 1973. – 567 с.
 2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. Главное изд-во. Физ.-мат. литературы, 1988. – 488 с.

3. Поршнеv С.В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений / С.В. Поршнеv, Е.В. Овечкина, В.Е. Каплан. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. –166 с.

4. Поршнеv С.В., Копосов А.С. О выборе математических моделей распределений ограниченных случайных последовательностей // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – № 10(84). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/53.pdf>.

5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. В 2-х тт. – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 399 с.

6. Рейф Ф. Статистическая физика. – М.: Наука, 1972. – 351 с.

7. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение: сб. статей. – Л.: ОНТИ – Главная редакция общетехнической литературы, 1936. –606 с.

References

1. Borodachev N.A., Abrashitov R.M., Veselova I.M. *Tochnost' proizvodstva v mashinostroenii i priborostroenii* [Accuracy of production in machinery construction and instrument making] Moscow: Mashinostroenie, 1973. 567 p.

2. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [A course of probability theory] Moscow: Nauka. 1988. 488 p.

3. Porshnev S.V., Ovechkina E.V., Kaplan V.E. *Teoriya i algoritmy approksimazii empiricheskikh zavisimostey i raspredeleniy* [Theory and algorithms of approximation of empirical dependencies and distributions] Ekaterinburg: UrO RAN, 2006. 166 p.

4. Porshnev S.V., Kopusov A.S. *O vybere matematicheskikh modeley raspredeleniy ogranichennykh sluchainykh posledovatel'nostey* – *Polytematicheskii setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* (Scientific journal KubSAU) – Krasnodar: KubSAU, 2012. no. 10(84). available at: <http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/53.pdf>

5. Guld H., Tobochnik Y. *Komp'yuternoe modelirovanie v fizike* [Computer modeling in physics] Moscow: Mir, 1990. Vol. 2. 399 p.

6. Reif F. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics] Moscow: Nauka, 1972. 351 p.

7. Einstein A., Smoluhovsky M. *Brounovskoe dvizhenie* [Brownian motion]: sb. statey. Leningrad: ONTI, 1936. 606 p.

Рецензенты:

Кубланов В.С., д.т.н., доцент, профессор кафедры радиоэлектроники информационных систем ГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург;

Доросинский Л.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информационных технологий ГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 23.01.2013.