УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Денисова М.Ю., Киндер М.И.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Казань, e-mail: public.mail@ksu.ru

Вырождающиеся эллиптические уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. В статье в n-мерном евклидовом пространстве строятся фундаментальные решения дифференциального уравнения 2m-го порядка с сингулярным оператором Бесселя, действующим по последней переменной. Для получения фундаментального решения данного уравнения с особенностью в произвольной точке применяется оператор обобщенного сдвига. Такие фундаментальные решения применяются к исследованию краевых задач с условиями типа четности на характеристической части границы. Выводятся формулы Грина. С помощью формул Грина доказывается единственность поставленных задач. Строятся потенциалы и даны формулы скачков для этих потенциалов, для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: сингулярный оператор, дифференциальное уравнение, полигармоническое уравнение

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE SINGULYARNY BESSEL'S OPERATOR

Denisova M.Y., Kinder M.I.

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, e-mail: public.mail@ksu.ru

The degenerating elliptic equations represent one of important sections of the modern theory of the differential equations with private derivatives. In article in n-dimensional Euclidean space fundamental solutions of the differential equation 2 m about with Bessel's acting on the last variable the singulyarny operator are under construction. The operator of the generalized shift is applied to obtaining the fundamental solution of this equation with feature in any point. Such fundamental decisions are applied to research of boundary value problems with conditions such as parity on a characteristic part of border. Green's first and second formulas are deduced. With the help of Green's formula we prove the uniqueness of problems. Potentials are constructed and formulas are given for jumps of these potentials, for data of a regional problem to system of the integrated equations.

Keywords: singulyarny operator, differential equation, polyharmonic equation

Вырождающиеся эллиптические уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Такие уравнения имеют многочисленные приложения в газовой динамике, теории малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек и др.

Пусть E_n^+ – полупространство $x_n > 0$ евклидова пространства E_n точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть G – конечная область в E_n, симметричная относительно плоскости $x_n = 0$ и ограниченная поверхностью Г. Обозначим через G_i^+ часть G, расположенную в E_n^+. Граница области G^+ разбивается $\Gamma^{(0)}$ и Γ^+, расположенные соответственно на плоскости $x_n = 0$ и в полупространстве $x_n > 0$. Поверхность Γ^+ является поверхностью класса $\Lambda_{m,B}$, когда $\Gamma \in \Lambda_m$ [3]. Через G_e^+ обозначим область $E_n^+ \setminus G_i^+ \cup \Gamma^+$, $\Gamma_e^{(0)}$ – ее граница, расположенная на плоскости $x_n = 0$.

Рассмотрим внутреннюю (внешнюю) краевую задачу: найти четное по x_n решение уравнения

$$\Delta_B^m u = 0 \qquad (1)$$

в области $G_i^+ \left(G_e^+\right)$, $(2m - 1)$ раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{G^+}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$D_B^l u\big|_{\Gamma^+} = f_l, \quad l = \overline{0, m-1},$$

и в случае внешней задачи удовлетворяющее на бесконечности условиям, обеспечивающим ее единственность. Здесь $D_B^l = \Delta_B^p$, если $l = 2p$ и $D_B^l = \frac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^p$, если $l = 2p + 1$, n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ, $\Delta_B = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_n}$, $B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$ – оператор Бесселя, k – любое положительное число, $m > 2$. Уравнение вида (1) назовем В-полигармоническим уравнением.

Известно [2], что фундаментальные решения уравнения (1) с особенностью в начале координат имеют вид

$$q_m(x) = \begin{cases} C_m^{(1)} r^{2m-\gamma}\ln r, & 2m > \gamma, \\ C_m^{(2)} r^{2m-\gamma}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; $\gamma = n + k$.

Значения $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$ выберем таким образом, чтобы

$$\Delta_B^l q_m = q_{m-l} \tag{2}$$

и

$$\int_{E_n^+} q_1(x)\Delta_B \vartheta(x) x_n^k dx = \vartheta(0) \tag{3}$$

для любой четной по x_n бесконечно дифференцируемой и финитной в E_n^+ функции $\vartheta(x)$.

Можно проверить, q_m удовлетворяет условиям (2) и (3) при следующих значениях $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$:

$$C_m^{(1)} = \frac{(-1)^{\frac{\gamma-2}{2}}}{2^{2m-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma(m)\Gamma\left(\frac{2m-\gamma+2}{2}\right)};$$

$$C_m^{(2)} = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{\gamma-2m}{2}\right)}{2^{2m-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma(m)}.$$

С помощью непосредственного подсчета получаем, что

$$\Delta_B^{m-1} q_m = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(2-\gamma)\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\frac{1}{r^{\gamma-2}}.$$

Для получения фундаментального решения с особенностью в произвольной точке ξ применим к функции $q_m(x)$ оператор обобщенного сдвига T_x^ξ [4]:

$$Q_m(x,\xi) = T_x^\xi q_m(x) = C_k \int_0^\pi q_m\left(x_1-\xi_1,\dots,x_{n-1}-\xi_{n-1},\sqrt{x_x^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\varphi}\right)\sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где $C_k = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$

Так как операторы T_x^ξ и Δ_B коммутируют, то в силу формальной самосопряженности оператора T_x^ξ из формулы (3) меследует, что

$$\int_{E_n^+} Q_1(x,\xi)\Delta_B \vartheta(\xi)\xi_n^k d\xi = \vartheta(x).$$

Пусть u и ω четные по x_n функции класса $C^{2m}(G^+)\cup C^{2m-1}(\overline{G^+})$. Тогда имеют место тождества

$$\Delta_B^s u\Delta_B^m\omega - \Delta_B^s\omega\Delta_B^m u = \sum_{j=0}^{m-s-1}\left(\Delta_B^{s+j}u\Delta_B^{m-j}\omega - \Delta_B^{s-j-1}\omega\Delta_B^{m+j+1}u\right), \tag{4}$$

$$\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}}\omega\right)^2 - \omega\Delta_B^m\omega = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}+j}\omega\Delta_B^{\frac{m}{2}-j}\omega - \Delta_B^{\frac{m}{2}-j-1}\omega\Delta_B^{\frac{m}{2}+j+1}\omega\right), \tag{5}$$

при четном m, и

$$\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega - \omega\Delta_B^m\omega = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}\left(\Delta_B^{\frac{m-1}{2}+j}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}-j}\omega - \Delta_B^{\frac{m-1}{2}-j}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}+j}\omega\right), \tag{6}$$

когда m – нечетное число.

Нам понадобятся, для четных по x_n функций $u,\omega \in C^{(2m)}(G^+)\cup C^{(2m-1)}(\overline{G^+})$, первая формула Грина

$$\int_{G^+}\omega\Delta_B\omega x_n^k dx + \int_{G^+}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 x_n^k dx = \int_{\Gamma^+}\omega\frac{\partial\omega}{\partial n_\xi}x_n^k d\Gamma \tag{7}$$

и вторая формула Грина

$$\int_{G^+} \left(u\Delta_B\omega - \omega\Delta_B u\right) x_n^k dx = \int_{\Gamma^+} \left(u\frac{\partial\omega}{\partial n_\xi} - \omega\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right) x_n^k d\Gamma. \quad (8)$$

Интегрируя обе части тождеств (4), (5), (6) по области G^+ и пользуясь формулой (8) получим обобщенные формулы Грина

$$\int_{G^+} \left(\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}}\omega\right)^2 - \omega\Delta_B^m\omega \right) x_n^k dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma^+} D_B^j\omega D_B^{2m-j-1}\omega x_n^k d\Gamma, \quad (9)$$

для всех четных m и

$$\int_{G^+} \left(\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega - \omega\Delta_B^m\omega \right) x_n^k dx = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \int_{\Gamma^+} D_B^{j-1}\omega D_B^{2m-j}\omega x_n^k d\Gamma, \quad (10)$$

когда m – нечетное число, а также имеет место формула

$$\int_{G^+} \left(\Delta_B^s u\Delta_B^m\omega - \Delta_B^s\omega\Delta_B^m u\right) x_n^k dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-s-1} \int_{\Gamma^+} \left(\Delta_B^{s+j} u \frac{\partial}{\partial n_\xi} \Delta_B^{m-j-1}\omega - \Delta_B^{m-j-1}\omega \frac{\partial}{\partial n_\xi} \Delta_B^{s+j} u \right) x_n^k d\Gamma, \quad \left(s = \overline{0, m-1}\right), \quad (11)$$

где $D_B^l = \Delta_B^p$, если $l = 2p$ и $D_B^l = \frac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^p$, если $l = 2p + 1$, n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ.

Теорема. Задача (1), (2) в классе $C^{2m}(G_i^+) \cup C^{2m-1}(\overline{G_i^+})$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $\omega(x)$ – разность двух предполагаемых решений. Тогда эта функция в области G_i^+ удовлетворяет уравнению (1), на границе Γ^+ однородным краевым условиям

$$D_B^l\omega\Big|_{\Gamma^+} = 0, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$\omega(x) \in C^{2m}(G_i^+) \cup C^{2m-1}(\overline{G_i^+}).$$

Пусть m – четное число. В силу формулы (9) и условий (12) следует, что

$$\Delta_B^{\frac{m}{2}}\omega = 0 \text{ в } G^+ \quad (13)$$

$$\Delta_B^j\omega\Big|_{\Gamma^+} = 0, \quad j = 0, 1, ..., \frac{m}{2} - 1. \quad (14)$$

С помощью первой формулы Грина (7) можно установить, что задача (13), (14) имеет только нулевое решение, то есть $\omega \equiv 0$.

Пусть теперь m – нечетное число. С учетом (10) и начальных условий (12), будем иметь

$$\int_{G^+} \left(\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega \right) \xi_n^k d\xi = 0.$$

Таким образом, получили две задачи

$$\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega = 0 \text{ в } G^+$$

$$\Delta_B^j\omega\Big|_{\Gamma^+} = 0, \quad j = 0, 1, ..., \frac{m-1}{2} - 1,$$

и

$$\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega = 0 \text{ в } G^+,$$

$$\Delta_B^j\omega\Big|_{\Gamma^+} = 0, \quad j = 0, 1, ..., \frac{m-1}{2},$$

которые аналогичны задаче (13), (14) следовательно $\omega \equiv 0$. Теорема доказана.

Как было показано в работе [1], имеют место следующие интегральные представления для решения уравнения (1):

$$\Delta_B^j q(x) = \sum_{s=1}^{m-j} \int_{\Gamma^+} Q_s(x,\xi) D_B^{2j+2s-1} q(\xi)\xi_n^k d_\xi\Gamma - \sum_{s=1}^{m-j} \int_{\Gamma^+} D_B^{2j+2s-2} q(\xi) \frac{\partial Q_s}{\partial n_\xi}\xi_n^k d_\xi\Gamma. \quad (15)$$

Отсюда при $j = 0$ имеем, что

$$q(x)=\sum_{s=1}^{m}\int_{\Gamma^+} Q_s(x,\xi)D_B^{2s-1}q(\xi)\xi_n^k d_\xi\Gamma-\sum_{s=1}^{m}\int_{\Gamma^+} D_B^{2s-2}q(\xi)\frac{\partial Q_s}{\partial n_\xi}\xi_n^k d_\xi\Gamma.$$

Введем в рассмотрение потенциалы

$$W_s^{(1)}(x,\chi)=\int_{\Gamma^+} Q_s(x,\xi)\chi(\xi)\xi_n^k d_\xi\Gamma,\quad s=\overline{1,m}. \tag{16}$$

$$W_s^{(2)}(x,\chi)=\int_{\Gamma^+} \frac{\partial}{\partial n_\xi}Q_s(x,\xi)\chi(\xi)\xi_n^k d_\xi\Gamma,\quad s=\overline{1,m}.$$

Формулу (15) с помощью этих потенциалов можно записать в виде

$$\Delta_B^j q(x)=\sum_{s=1}^{m-j}W_s^{(1)}(x,\chi_{2s-1})+\sum_{s=1}^{m-j}W_s^{(2)}(x,\chi_{2s-2}), \tag{17}$$

в том числе при $j = 0$

$$q(x)=\sum_{s=1}^{m}W_s^{(1)}(x,\chi_{2s-1})+\sum_{s=1}^{m}W_s^{(2)}(x,\chi_{2s-2}), \tag{18}$$

где $\chi_\ell=(-1)^\ell D_B^{2j+2s-1}q(\xi)$ для всех $j=\overline{0,m-1}$, $\ell=\overline{0,2m}$. С помощью перенумерации потенциалы в формуле (18) расположим в порядке возрастания индексов их плотностей. В результате мы имеем

$$W_\ell(x,\chi_\ell)=\begin{cases}W_s^{(2)}(x,\chi_{2s-2}), & \ell=2s-2,\\ W_s^{(1)}(x,\chi_{2s-1}), & \ell=2s-1,\end{cases} \tag{19}$$

где $\ell=\overline{0,2m-1}$.. Тогда формулы (17) и (18) примут вид

$$\Delta_B^j q(x)=\sum_{\ell=0}^{2m-2j-1}W_\ell(x,\chi_\ell); \tag{20}$$

$$q(x)=\sum_{\ell=0}^{2m-1}W_\ell(x,\chi_\ell). \tag{21}$$

Выпишем формулы скачка потенциалов $W_\ell(x, \chi_\ell)$

$$W_{0,i}(z,\chi_0)=-\chi_0(z)+\widetilde{W_0}(z,\chi_0);$$

$$W_{0,e}(z,\chi_0)=\chi_0(z)+\widetilde{W_0}(z,\chi_0);$$

$$\frac{\partial W_{1,i}(z,\chi_1)}{\partial n_\xi}=\chi_1(z)+\frac{\partial \widetilde{W_1}(z,\chi_1)}{\partial n_\xi};$$

$$\frac{\partial W_{1,e}(z,\chi_1)}{\partial n_\xi}=-\chi_1(z)+\frac{\partial \widetilde{W_1}(z,\chi_1)}{\partial n_\xi},$$

при этом $z\in\Gamma^+$, индекс i – означает предел из G_i^+; e – предел из G_e^+, волна – прямое значение. Отсюда и из формулы (2) следует

$$D_B^s W_{\ell,i}(z,\chi_\ell)=\begin{cases}D_B^s\widetilde{W_\ell}(z,\chi_\ell), & s<\ell,\\ (-1)^{s-1}\chi_\ell(z)+D_B^s\widetilde{W_\ell}(z,\chi_\ell), & \ell=s,\\ 0, & s>\ell.\end{cases}$$

$$D_B^s W_{\ell,e}(z,\chi_\ell)=\begin{cases}D_B^s\widetilde{W_\ell}(z,\chi_\ell), & s<\ell,\\ (-1)^{s}\chi_\ell(z)+D_B^s\widetilde{W_\ell}(z,\chi_\ell), & \ell=s,\\ 0, & s>\ell.\end{cases}$$

Заключение

В работе исследуются краевые задачи для B-полигармонического уравнения 2m-порядка в n-мерном случае. Доказывается единственность поставленных задач. Строятся потенциалы и даны формулы скачков для этих потенциалов, необходимые для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений.

Список литературы

1. Денисова М.Ю. Интегральное представление решения В-полигармонического уравнения // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6; URL: www.science-education.ru/106-7417 (дата обращения: 27.09.2013)

2. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения В-эллиптических уравнений//Дифференц. уравнения.–1967.–Т.3.№ 1.–С.114-129.

3. Панич О.И. О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка // Матем.сб. – 1960. – Т. 50, № 3.–С. 335–368.

4. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. –Ч.3. – Душанбе, 1982. – 171 с.

5. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalired potential theory // Trans. Am. Math.Soc. – 1948. – № 63. – P. 342–354.

References

1. Denisova M.Y. *Modern problems of science and education*, 2012, no 6, available at: www.science-education.ru/106-7417.

2. Kipriyanov I.A., Kononenko V.I. *Differential equations*,1967, vol. 3, no 1, pp. 114–129.

3. Panich O.I. *Matematicheskii Sbornik*,1960,vol. 50, no 3, pp. 335–368.

4. Radzhabov N. Integralnoe predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsialnykh uravneniy s singulyarnoy liniey ili singulyarnymi poverkhnostyami [Integrated representation and regional problem the differential equations with the singulyarny line or the singulyarny surfase]. Dushanbe, 1982, 171 p.

5. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalired potential theory. Trans. Am. Math.Soc., 1948, no. 63, pp. 342–354.

Рецензенты:

Мухлисов Ф.Г., д.ф.-м.н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань;

Сушков С.В., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань;

Кульбачинский В.А., д.ф.-м.н., профессор, кафедра физики низких температур и сверхпроводимости, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва;

Бичурин М.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой ПТРА, Новгородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 30.12.2013.