

УДК 621.3.011

## О РАСЧЁТЕ КОЭФФИЦИЕНТА УВЕЛИЧЕНИЯ ПЛАНАРНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ СПИРАЛЬНОГО ТИПА

<sup>1</sup>Сапогин В.Г., <sup>2</sup>Прокопенко Н.Н., <sup>3</sup>Манжула В.Г.

<sup>1</sup>Таганрогский технологический институт Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: sapogin@mail.ru;

<sup>2</sup>Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал) Донского государственного технического университета, Шахты, e-mail: prokopenko@ssu.ru;

<sup>3</sup>НОУ ВПО «Институт коммуникативных технологий», Москва, e-mail: manjula@bk.ru

Уменьшение геометрических размеров элементов интегральных микросхем породило фундаментальную проблему создания планарной индуктивности, которая бы в малых размерах имела приемлемые значения. Оценки индуктивностей в микрометровом диапазоне размеров по известным формулам иногда приводят к абсурду. Это потребовало создания физико-математических моделей расчёта индуктивности, которые были бы ориентированы на планарную технологию. Предложен оценочный метод расчёта планарной индуктивности спирального вида. Метод основан на трёх положениях: 1) по заданному значению тока в кольце рассчитывается значение индукции магнитного поля в центре кольца; 2) по закону Био–Савара–Лапласа рассчитывается новое значение индукции, которое создаёт в центре ограниченная планарная спираль, вписанная в исходное кольцо; 3) вычисляется коэффициент увеличения индукции магнитного поля, который в принятых приближениях совпадает с коэффициентом увеличения индуктивности спирального типа. Проведена сравнительная оценка значений спиральной индуктивности для спиралей Архимеда и обобщённых спиралей. Показано, что применение спиралей с количеством витков  $N = 10$  может увеличивать значение их индуктивности по сравнению с кольцевой от 40 до 1500 раз.

**Ключевые слова:** индуктивность, спиральная индуктивность, индукция, индуктивность кольца, поток магнитного поля

## ON CALCULATION OF ENLARGEMENT FACTOR OF SPIRAL TYPE'S PLANAR INDUCTANCE

<sup>1</sup>Sapogin V.G., <sup>2</sup>Prokopenko N.N., <sup>3</sup>Manzhula V.G.

<sup>1</sup>Taganrog Institute of Technology Southern Federal University, Taganrog, e-mail: sapogin@mail.ru;

<sup>2</sup>Institute of service and business (branch) Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education Don State Technical University ISB (branch) FSBEI of HPE «DSTU», Shakhty, e-mail: prokopenko@ssu.ru;

<sup>3</sup>Non-state institute of higher education «Institute of communicative technologies», Moscow, e-mail: manjula@bk.ru

The diminution of geometry sizes of microcircuit elements generates the fundamental problem of creation of planar inductance, which would have acceptable values under small sizes. The estimations of inductances with the help of known formulas at micrometer range of sizes sometimes bring to absurdity. So, for calculation of inductance the creation of physical and mathematical models, which would be oriented at planar technology, has demanded. The estimation method for calculation of spiral type's planar inductance has been proposed. The method has been based at three states: 1) the value of magnetic field's induction in the center of the ring is calculated by given current's value in the ring; 2) the new value of induction, which finite (limited, confined, bounded) planar spiral, inscribed into original (initial) ring, creates in the center, is calculated on (by) Biot-Savart law; 3) the enlargement factor of magnetic field's induction, which coincides (agree) with enlargement factor of spiral type's induction in accepted approximations, is calculated. The comparative estimation of spiral inductance's values for Archimedean spirals and generalized spirals has been executed. It is shown that application of spirals with wind count of  $N = 10$  can enlarge the value of their inductance from 40 till 1500 as compared with the circular one.

**Keywords:** inductance, spiral inductance, induction, circular inductance, magnetic field flux

Уменьшение геометрических размеров элементов интегральных микросхем породило в микро-системотехнике фундаментальную проблему создания планарной индуктивности, которая бы в малых размерах имела приемлемые значения для построения сложных функциональных блоков и IP-модулей, работающих на Гигагерцах [2,3].

Оценки индуктивностей с использованием известных математических методов расчёта, разработанных Калантаровым П.Л. и Цейтлиным А.А. [1] в 70-х годах прошло-

го века, в микрометровом диапазоне геометрических размеров могут приводить к отрицательным значениям индуктивности.

Обнаруженный недостаток геометрической теории потребовал создания принципиально новых физико-математических моделей, которые были бы ориентированы на потребности планарной технологии.

Ниже предлагается оригинальная методика расчётов спиральной индуктивности  $L$  высокой симметрии, исходящая из физического определения этого понятия как коэффициента пропорциональности меж-

ду потоком  $\Phi$  и током  $i$ , создающим этот поток [4]

$$\Phi = Li. \quad (1)$$

В связи с этим предлагаемая последовательность расчёта индуктивности плоской токовой спирали заключается в следующем:

1) по заданному значению тока в кольце радиусом  $R$  рассчитывается значение магнитного поля  $B_*$  в центре кольца;

2) в это кольцо помещается спираль с заданным законом зависимости  $r = r(\varphi)$  в полярных координатах, который ограничен по числу витков  $N$  двумя переменными: начальным значением угла  $\varphi_1$  и радиусом  $r_1$  и конечным значением угла  $\varphi_2$  и радиусом  $r_2 = R$ , совпадающим с радиусом кольца;

3) по закону Био–Савара–Лапласа рассчитывается новое значение индукции магнитного поля  $B$ , которое создаёт ограниченная планарная спираль в центре кольца;

4) вычисляется коэффициент увеличения индукции магнитного поля  $a = B/B_*$  и находится связь значения индуктивности, формируемого спиралью, с коэффициентом увеличения индукции  $a$ .

#### Физико-математическая модель расчёта

Одним из мощных методов расчета магнитостатических полей по праву считается закон Био–Савара–Лапласа [4]. Он позволяет выяснить физические закономерности распределения магнитных полей, создаваемых простейшими токовыми системами. В современных математических обозначениях он записывается в виде

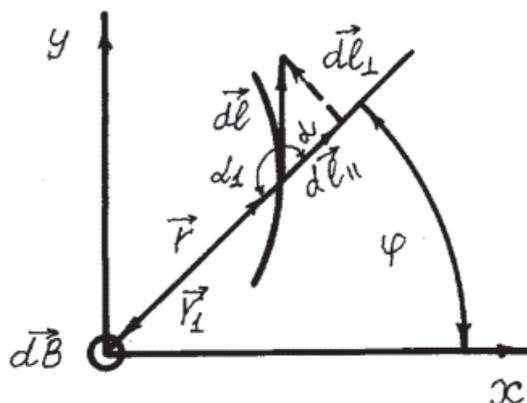
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2)$$

где  $d\mathbf{B}$  – элементарная магнитная индукция поля, создаваемая элементом проводника с током  $I d\mathbf{l}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $d\mathbf{l}$  – элементарный вектор длины, совпадающий по направлению с током (элемент проводника);  $I$  – сила тока;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения  $A$ , в которой определяется магнитная индукция.

#### Магнитное поле тока в центре спирали Архимеда

Расчёт магнитного поля в центре спирали будем проводить, используя закон (2). На рисунке представлено расположение векторов задачи. Направление векторов и сами векторы отмечены стрелками. На рисунке представлены декартовая и полярная системы координат. Жирная кривая выделяет фрагмент спирали, которая начинается в точке  $(0,0)$ . Вектор  $d\mathbf{l}$  направлен по касательной к выделенной кривой и совпадает с направлением тока. Он имеет две компоненты  $d\mathbf{l}_{\parallel}$  и  $d\mathbf{l}_{\perp}$ . Вектор  $d\mathbf{l}$  составляет угол  $\alpha$  с направлением радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Вектор  $d\mathbf{l}$  составляет угол  $\alpha_1$  с направлением другого вектора  $\mathbf{r}_1$ . Векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  – противоположны друг другу, но равны по модулю.

На плоскости, представленной на рисунке, закон (2) можно записать в скалярном виде



Направление основных векторов задачи

На плоскости, представленной на рисунке, закон (2) можно записать в скалярном виде

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha_1}{4\pi r_1^2}. \quad (3)$$

Затем в (3) следует замена

$$dl \sin \alpha_1 = dl \sin \alpha = r d\varphi. \quad (4)$$

Она указывает на то, что поперечная составляющая вектора  $d\mathbf{l}_{\perp}$  вносит вклад в формирование индукции магнитного поля в начале координат, а продольная составляющая  $d\mathbf{l}_{\parallel}$  – не вносит. Тогда формула для расчёта элементарной индукции магнитного поля в центре спирали имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (5)$$

Из (5) следует общая формула для расчёта индукции в начале координат для любых спиралей, имеющих закон, представленный в полярных координатах  $r = r(\varphi)$ ,

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (6)$$

Рассчитаем коэффициент увеличения индукции в центре спирали Архимеда. Уравнение спирали Архимеда имеет вид [5]

$$r = a\varphi, \quad (7)$$

где  $a$  – постоянная. Как известно, спираль Архимеда описывает движение точки, которая имеет две компоненты скорости – постоянную радиальную скорость движения

$v_r$  и постоянную угловую скорость  $\omega$ . Постоянная  $a$  связана с этими переменными соотношением  $a = v_r/\omega$ .

Предположим, что начальное положение спирали Архимеда находится в точке  $r = r_1$  и имеет угол  $\varphi_1 = p/2$ . Это позволяет устранить особенность, возникающую в начале координат. Тогда начальный и конечный радиусы и начальный и конечный угол спирали связаны соотношением

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R}{r_1} = 1 + 4N = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad (8)$$

где  $N$  – целое количество витков спирали.

Интегрируя в этих пределах выражение (6), получим выражение для коэффициента увеличения индукции поля  $a$ , который зависит только от числа витков  $N$

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = (1 + 4N) \ln(1 + 4N)/4, \quad (9)$$

где  $B_* = \mu_0 I / (2)R$  (10)

– масштаб индукции, создаваемый в центре кольца тем же током.

В табл. 1 представлена зависимость коэффициента увеличения индукции  $a$  и отношения конечного радиуса к начальному  $R/r_1$  от числа витков спирали Архимеда.

**Таблица 1**

Зависимость коэффициента увеличения индукции от числа витков спирали Архимеда

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\alpha$	4,94	8,33	12,04	15,98	20,12	24,41	28,85	33,40	38,06	89
$R/r_1$	9	13	17	21	25	29	33	37	41	81

Из табл. 1 видно, что увеличение числа витков от 2 до 20 позволяет увеличить индукцию магнитного поля в центре спирали Архимеда от 5 до 90 раз.

#### Магнитное поле тока в центре обобщённой спирали

Для обобщённых спиралей вида

$$r = a\varphi_n, \quad (11)$$

где  $n$  – любое число, кроме единицы, возможны следующие классы спиралей. Класс спиралей отрицательных порядков  $n < 0$  (класс закручивающихся спиралей), класс дробных положительных порядков  $0 < n < 1$  и класс спиралей положительных порядков  $1 < n < \infty$ . Последние два класса относятся к классу раскручивающихся спиралей.

Подставляя (11) в интеграл (6), для коэффициента увеличения индукции поля получим соотношение

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = \frac{(1 + 4N)^n}{4(1 - n)} \left[ (1 + 4N)^{1-n} - 1 \right]. \quad (12)$$

Связь начальных и конечных переменных получается в виде

$$\frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)^n = (1 + 4\pi N)^n. \quad (13)$$

В табл. 2 представлены зависимости коэффициента увеличения индукции,  $a$  в центре обобщённой спирали для разных индексов  $n$ . Первые две строки рассчитаны для  $n = 1/2$ , Вторые две строки рассчитаны для  $n = 3/2$ , а последние две строки рассчитаны для  $n = 2$ .

**Таблица 2**

Зависимость коэффициента увеличения индукции от числа витков обобщённых спиралей для разных  $n$

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$a(n_1)$	3,0	4,7	6,5	8,2	10,0	11,8	13,6	15,5	17,3	36,0
$R/r_1$	3,0	3,6	4,1	4,6	5,0	5,4	5,7	6,1	9,0	27,0
$a(n_2)$	9,0	16,9	26,5	37,6	50,0	63,6	78,3	94,0	110	324
$R/r_1$	27	46,9	70,0	96,2	125	156	190	225	262	729
$a(n_3)$	18	39	68	105	150	203	264	333	410	1620
$R/r_1$	81	169	289	441	625	841	1089	1369	1681	6561

Из табл. 2 видно, что наиболее перспективными являются раскручивающиеся спирали с показателем  $n > 1$ . Для рассчитанных значений полученные коэффициен-

ты увеличения индукции для одного и того же количества витков  $N$  всегда больше, чем у спирали Архимеда. Но, с другой стороны, большие коэффициенты  $a$  можно получить

только путём увеличения эффективной площади, занимаемой обобщённой спиралью.

Считая, что среднее значение потоков индукции в кольце и спирали можно рассчитывать по значениям индукции в центре, получим оценочное соотношение для коэффициента увеличения индуктивности, который совпадает с коэффициентом увеличения индукции

$$L = \alpha L_*, \quad (14)$$

где  $L_* = \mu_0 \pi R/2 \quad (15)$

– масштаб индуктивности.

Проведём оценку для  $N = 10$  витков спиральной индуктивности, начальный радиус, которой 10 мкм. Для спирали Архимеда конечный радиус 410 мкм (см. табл. 1), масштаб индуктивности 0,81 нГн, а увеличение индуктивности происходит почти в 40 раз до значений 30,8 нГн. Для спирали того же начального радиуса с  $n = 2$  получим конечный радиус 16,8 мм, (см. табл. 2 и соотношение (13)), масштаб индуктивности 33,2 нГн, а увеличение индуктивности происходит почти в 1680 раз до значений 55,8 мкГн.

#### Выводы

- Предложен оценочный метод расчёта планарной индуктивности спирального вида.
- Метод базируется на законе Био–Савара–Лапласа, который позволяет в полярных координатах рассчитывать индукцию в центре для любых видов спиралей.
- Проведена сравнительная оценка значений спиральной индуктивности для спиралей Архимеда и обобщённых спиралей.
- Показано, что применение спиралей с количеством витков  $N = 10$  может увеличивать значение их индуктивности по сравнению с кольцевой от 40 до 1500 раз.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 12-08-00654/12 (2012-2013 гг.).*

#### Список литературы

1. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: справочная книга. - Л.: Энергоатомиздат, 1986. - 488 с.
2. Манжула В.Г. Исключение структурной, функциональной и схемотехнической избыточности при синтезе аналоговых систем в корпусе // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 2. – С. 123–127.
3. Манжула В.Г. Функционально интегрированная микроэлектронная система защиты на основе быстродействующего датчика температуры // Датчики и системы. – 2012. – № 7. – С. 18–22.
4. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа. 1983. – 463 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 976 с.

#### References

1. Kalantarov P.L., Tseitlin L.A. Raschyot induktivnostej: spravocnaya kniga. L.: Energoatomizdat, 1986. 488 p.
2. Manzhula V.G. Isklyuchenie strukturnoj, funktsional'noj i skhemotekhnicheskoy izbytochnosti pri sinteze analogovykh sistem v korpuse. Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzhya. 2011. no. 2. pp. 123–127/
3. Manzhula V. G. Funktsionalno integrirovannaya mikroelektronnaya sistema zashhity na osnove bystrodejstvuyushhego datchika temperatury. Datchiki i sistemy. 2012. no. 7. pp. 18–22.
4. Matveev A.N. Elektrichestvo i magnetizm. M.: Vysshaya shkola. 1983. 463 p.
5. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike. Dlya inzhenerov i uchashhikhsya vtuzov. M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980, 976 p.

#### Рецензенты:

Бубнов В.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой естественнонаучных дисциплин, ГБОУ ВПО «Московский городской педагогический университет», г. Москва;  
Крутчинский С.Г., д.т.н., профессор кафедры систем автоматического управления, ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону.  
Работа поступила в редакцию 25.12.2013.