УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Сираев Р.Р.

Пермский военный институт внутренних войск МВД России, Пермь, e-mail: pvivvmvd@mail.ru

Теоретически исследована фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. С учетом различных инерционных эффектов обоснованы уравнения фильтрации. С этой целью пористая среда рассматривалась как совокупность капилляров. Для установления связи расхода жидкости с градиентом давления учитывались потери давления вследствие извилистости капилляра, непостоянства размеров поровых каналов, пересечения капилляров и вследствие систематического расширения капилляров. Закон фильтрации в пористой среде получается в результате осреднения по пространству выражений, полученных для отдельных капилляров. Показано, что к общепринятым для данных задач уравнениям Форцгеймера необходимо добавить слагаемое, описывающее неоднородность среды. Уточненные уравнения апробированы на задаче о фильтрационном потоке в плоском канале с изменяющимся коэффициентом пористости. Обнаружена асимметрия течения: скорость фильтрации в сторону увеличения пористости больше, чем в обратном направлении.

Ключевые слова: фильтрация, неоднородная пористая среда, инерционные эффекты гидродинамики, уравнения фильтрации

FILTRATION OF INCOMPRESSIBLE FLUID IN A HETEROGENEOUS POROUS MEDIUM

Siraev R.R.

Perm Military Institute of Internal Troops MIA of Russia, Perm, e-mail: pvivvmvd@mail.ru

Fluid flow through a non-uniform porous medium was theoretically investigated. The equations of a filtration were verified with the account hydrodynamic inertia effects. For this order the porous medium was considered composed from capillaries. The relation between flow rate and pressure gradient was determined into account with pressure loss due to the winding channels, changing the width of capillaries, the intersection of capillaries and the systematic expansion of capillaries. The filtration law was obtained as a result of space averaging of expressions for some capillaries. It was shown that the Forchheimer's equations necessary to add a term that describes heterogeneity of the medium. The updated equations were tested on a simple problem. The filtration in the flat channel with variable coefficient of porosity was analyzed. Asymmetry of a flow was found: filtration velocity towards increase in porosity is more, than in the opposite direction.

Keywords: fluid flow through a non-uniform porous medium, inertia effects of hydrodynamics, filtration low

Фильтрационные течения жидкости в неоднородных пористых средах широко распространены в природе и технике и постоянно привлекают повышенный интерес исследователей. Большое количество работ посвящено изучению фильтрации в многослойных и неоднородных грунтах (см. [1]). При этом предполагалось, что неоднородность среды обусловлена только пространственными градиентами проницаемости среды, а пористость считалась постоянной. Относительно недавно появились работы, в которых рассматриваются эффекты, обусловленные неоднородностью пористости среды. Например, в [2] для таких сред обнаружено возникновение осредненного течения при наличии периодического воздействия.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Обосновываются уравнения фильтрации, при этом учитываются различные гидродинамические инерционные эффекты, в том числе характерные для неоднородной среды. Полученные уравнения применяются для решения задачи о течении жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородной пористой средой.

Постановка задачи и уравнения фильтрации. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ_f и динамической вязкостью μ в канале, заполненном пористым материалом, возникающее под воздействием перепада давления на входе (in) и выходе (out) канала. Материал канала характеризуется коэффициентом пористости ε и проницаемостью K. Будем считать, что пористая среда неоднородна по пространству, т.е. ε, K – функции координат. Теоретическое изучение фильтрации жидкостей проводится на основе уравнения Дарси, устанавливающего связь между градиентом давления и скоростью фильтрации

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\vec{v}. \qquad (1)$$

Закон Дарси может быть обоснован при помощи общих дифференциальных уравнений гидродинамики – уравнений Навье-Стокса – при условии, что силами инерции пренебрегают. С увеличением скорости движения жидкости в пористой среде возрастает роль сил инерции. При движении

жидкости по поровым каналам с большой скоростью величины и направления скоростей жидких частиц значительно изменяются по причинам извилистости каналов и непостоянства их поперечных размеров. Большие изменения скоростей означают существование больших сил инерции, что приводит к нарушению закона Дарси. При этом часто используют уравнение Форцгеймера, в котором вследствие учета инерционных эффектов появляется слагаемое, квадратичное по скорости фильтрации жидкости (см.[5])

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\vec{v} - c_F K^{-1/2}\rho_f |\vec{v}|\vec{v}. \qquad (2)$$

Здесь c_F – безразмерный коэффициент (трения или торможения) Форцгеймера, величина которого зависит от природы пористого материала. В расчетах авторов значение c_F изменялось от нуля (для модели Дарси) до единицы для сред с умеренной пористостью. Проведем обоснование уравнения Форцгеймера для случая неоднородной пористой среды. Для этого рассмотрим движение жидкости в тонком капилляре, для которого с учетом различных инерционных эффектов найдем связь расхода жидкости с градиентом давления. Далее представим пористую среду как совокупность капилляров и выведем уравнение, связывающее скорость фильтрации и градиент давления.

Будем учитывать следующие инерционные эффекты:

1) потери давления, возникающие вследствие извилистости капилляров;

2) «микродросселирование», т.е. накопление потерь давления вследствие непостоянства поперечных размеров поровых каналов, имеющих как бы гофрированную форму – расширения канала сменяются областью сужения при постоянном среднем диаметре;

3) потери давления на пересечении двух капилляров;

4) потери давления вследствие систематического расширения капилляров.

Абсолютное значение величины полного градиента давления $\Delta p/\Delta L$, который должен быть приложен для преодоления сопротивления движения жидкости, можно представить как сумму

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{\Delta p_\mu}{\Delta L} + \frac{\Delta p_\rho}{\Delta L}, \qquad (3)$$

где $\Delta p_\mu/\Delta L$ – абсолютное значение величины градиента давления, учитывающего сопротивление внутреннего трения вязкой жидкости и трение ее о стенки поровых каналов; $\Delta p_\mu/\Delta L$ – величина градиента давления, необходимого для преодоления инерционных сопротивлений, связанных с особенностями геометрической структуры пористой среды. Величина $\Delta p_\mu/\Delta L$ определяется из закона Дарси (1). Что касается градиента $\Delta p_\rho/\Delta L$, то он находится из расчета потерь энергии вследствие указанных выше инерционных эффектов.

Для начала рассмотрим влияние извилистости капилляра. Будем считать, что жидкость движется со скоростью u по капилляру кругового сечения с диаметром d, который состоит из искривленных участков с радиусом кривизны R. Тогда на искривленном участке на частицы жидкости действует центростремительное ускорение u^2/R, и в результате возникает избыточное давление $\rho_f u^2 d/R$. Для единичного извилистого капилляра, полагая, что на отрезке ΔL встречается N_1 криволинейных участков, найдем

$$\left|\frac{\Delta p_\rho}{\Delta L}\right| = \frac{N_1 \rho_f d}{R\Delta L} u^2. \qquad (4)$$

Представляя пористую среду как совокупность капилляров, получим уравнение, связывающее скорость фильтрации и градиент давления

$$\left|\frac{\Delta p_\rho}{\Delta L}\right| = \frac{\rho_f}{k_\rho} v^2,$$

где

$$k_\rho = \frac{\varepsilon^2 \Delta L R}{N_1 d}. \qquad (5)$$

Для процесса микродросселирования градиент $\Delta p_\rho/\Delta L$ находится из расчета потери энергии при выходе струек жидкости из мест сжатия в места расширения. Кинетическая энергия, потерянная струйкой жидкости при внезапном расширении струи, равна кинетической энергии соответствующей потерянной скорости (по теореме Борда–Карно). Следовательно,

$$\left|\Delta p_\rho\right| = \frac{\rho_f}{2}\left(u_c - u_p\right)^2, \qquad (6)$$

где u_c – средняя скорость в месте сжатия; u_p – средняя скорость в месте расширения.

Относя равенство (6) к единице длины капилляра и полагая, что по всей его длине встречается N_2 сжатий и расширений, найдем

$$\left|\frac{\Delta p_\rho}{\Delta L}\right| = \frac{N_2 \rho_f}{2\Delta L}\left(u_c - u_p\right)^2. \qquad (7)$$

Теперь представим пористую среду как совокупность капилляров и перейдем к характеристикам, описывающим фильтрацию в пористой среде

$$u_c - u_p = \frac{Q}{S_c} - \frac{Q}{S_p} = \frac{S_p - S_c}{S_c S_p} Q;$$

$$u = \frac{\mathrm{v}}{\varepsilon}; \quad u = \frac{q}{S_{\text{ср}}}, \tag{8}$$

где Q – расход жидкости в пористом канале, S_c и S_p – площадь просвета сжатых и расширенных частей канала соответственно, $S_{\text{ср}}$ – средняя просветная площадь канала. Подставляя значения u и q в равенство (7), получим

$$\left|\frac{\Delta p_{\rho}}{\Delta L}\right| = \frac{\rho_f}{k_{\rho}}\mathrm{v}^2 \tag{9}$$

где $k_{\rho} = \dfrac{2\varepsilon^2 \Delta L}{N_2}\left(\dfrac{S_{\text{ср}} S}{S_p - S_c}\cdot\dfrac{1}{S_{\text{ср}}}\right)^2$.

Инерционные эффекты третьего типа приводят к выражению, аналогичному (5) или (9). Полученные значения градиентов $\Delta p_{\mu}/\Delta L$ подставим в формулу (3) и перейдем к векторной форме

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\vec{\mathrm{v}} - \frac{\rho_f}{k_{\rho}}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|\vec{\mathrm{v}}. \tag{10}$$

Как видно, учет инерционных эффектов первого, второго и третьего типа приводит к уравнению Форцгеймера, но с тем отличием, что (10) содержит для множителя при квадратичном по скорости слагаемом конкретное выражение от пористости и параметров, характеризующих структуру порового пространства. В дальнейшем будем использовать общепринятую форму уравнения Форцгеймера (2), считая при этом

$$K = d_p^2 \kappa(\varepsilon),$$

где d_p – эффективный диаметр (диаметр частицы фиктивного грунта), $\kappa(\varepsilon)$ – безразмерная функция пористости и параметров, описывающих внутреннюю структуру пористой среды.

Теперь рассмотрим потери давления вследствие систематического расширения капилляров. По всей длине капилляра в соответствии с законом Бернулли $p + \rho_f u^2 = \text{const}$, и с учетом $u = q/s$, где q – расход жидкости и s – площадь поперечного сечения, для разности давлений на входе и выходе из капилляра получаем

$$\Delta p_{\rho} = -\rho_f \frac{\Delta\left(u^2\right)}{2} = -\rho_f \frac{q^2}{2}\Delta\left(\frac{1}{s^2}\right). \tag{11}$$

Представляя пористую среду как совокупность капилляров, можем написать

$$\frac{\Delta p_{\rho}}{\Delta L} = -\frac{\rho_f Q^2}{2\Delta L}\Delta\left(\frac{1}{S^2}\right), \tag{12}$$

где Q – расход жидкости в пористом канале; S – площадь просвета пор. Для канала с площадью поперечного сечения S_0 и просветностью e

$$S = eS_0; \quad Q = \mathrm{v}S_0;$$

$$\frac{\Delta p_{\rho}}{\Delta L} = -\frac{\rho_f \mathrm{v}^2}{2\Delta L}\Delta\left(\frac{1}{e^2}\right). \tag{13}$$

Просветность является независимой характеристикой пористой среды, хотя ее часто пытаются связать с коэффициентом пористости. Так с помощью гранулярной модели С. Слихтером установлено $e = 0{,}603\varepsilon^{1{,}38}$ (см. [4]). Однако во многих других исследованиях считается, что просветность по величине равна пористости. Поэтому в дальнейшем полагаем $e = \varepsilon$.

Таким образом, с учетом всех инерционных эффектов получаем уравнение, описывающее фильтрацию жидкости в неоднородной пористой среде

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\vec{\mathrm{v}} - c_F K^{-1/2}\rho_f \left|\vec{\mathrm{v}}\right|\vec{\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\rho_f \mathrm{v}^2 \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{14}$$

К уравнениям переноса импульса следует добавить уравнение непрерывности:

$$div\,\vec{\mathrm{v}} = 0. \tag{15}$$

В системе (14)–(15) перейдем к безразмерным величинам. Предположим $K = K_0\kappa$, где $K_0 = d_p^2$ – среднее по каналу значение проницаемости; κ – безразмерная функция координат. Выберем в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости и давления соответственно L, L/v_0, v_0, $\rho_f \mathrm{v}_0^2$. Литерой L обозначен характерный размер канала (например, его ширина), а $\mathrm{v}_0 = L\mu/\rho_f K_0$ представляет собой характерную скорость задачи. За безразмерными величинами сохраним те же обозначения, что и за размерными. В результате уравнения фильтрации принимают вид

$$\nabla p = -\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\kappa} - c_F\left(Da\cdot\kappa\right)^{-1/2}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|\vec{\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\mathrm{v}^2\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right);$$

$$div\,\vec{\mathrm{v}} = 0. \tag{16}$$

Граничные условия записываются на твердой границе Г и на входе и выходе канала

$$\mathrm{v}_n\big|_{\Gamma} = 0; \quad p_{in} = p_1; \quad p_{out} = p_2. \tag{17}$$

В сформулированной задаче интенсивность и характер течения определяются свойствами пористой среды, разностью давлений $\Delta p = p_2 - p_1$ и числом Дарси $Da = K/L^2$.

Плоскопараллельная фильтрация. Рассмотрим одномерное установившееся движение жидкости – плоскопараллельный поток вдоль оси x декартовой системы координат. Уравнения (16) принимают вид:

$$p' = -\kappa^{-1} v_x - c_F (Da \cdot \kappa)^{-1/2} |v_x| v_x - \frac{1}{2} v_x^2 \left(\varepsilon^{-2}\right)'; \qquad v_x' = 0. \tag{18}$$

В этих уравнениях штрих означает производную по координате x. На входе $x = x_1$ и на выходе $x = x_2$ канала выполняются граничные условия:

$$x = x_1: \quad p = p_1; \qquad x = x_2: \quad p = p_2. \tag{19}$$

Уравнения (18)–(19) могут быть решены аналитически, если определена связь проницаемости κ с пористостью, либо, если такая корреляция не прослеживается, необходимо задать проницаемость как функцию координат. В работах Л.С. Лейбензона, И. Козени, С. Слихтера установлена функциональная зависимость между пористостью и проницаемостью, но только для фиктивных грунтов (см. [4]). Что же касается реальных горных пород, то, как указывают многие исследователи, общей функциональной связи пористости с проницаемостью не обнаружено; она наблюдается только для отдельных видов пород, например, для песчаников. Поэтому ограничимся самым простым с математической точки зрения случаем: будем считать, что проницаемость постоянна.

В этом случае уравнения (18)–(19) имеют решение

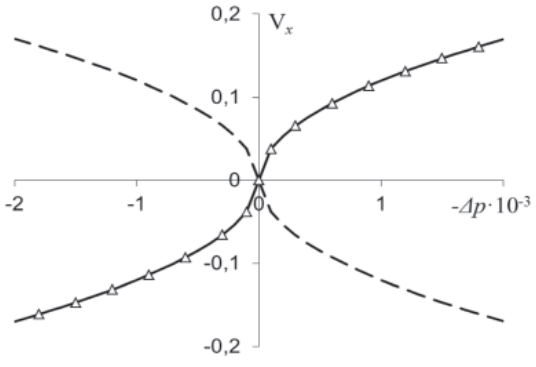
$$v_x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$b = x_2 - x_1; \quad c = p_2 - p_1;$$

$$p_1 > p_2: \quad a = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^{-2} - \varepsilon_1^{-2}\right) + Da^{-1/2}\left(x_2 - x_1\right);$$

$$p_1 < p_2: \quad a = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^{-2} - \varepsilon_1^{-2}\right) - Da^{-1/2}\left(x_2 - x_1\right). \tag{20}$$

На рисунке представлена зависимость скорости фильтрации от разности давлений Δp для случая, когда пористость среды меняется по линейному закону вдоль оси канала, $\varepsilon_1 = 0{,}3$; $\varepsilon_2 = 0{,}6$; $Da = 10^{-6}$; $c_F = 0{,}55$; $x_2 - x_1 = 1$. Во всем диапазоне значений Δp существуют два решения. Одно из них является устойчивым и описывается выражением (20) со знаком плюс перед корнем. Данная ветвь графика обозначена сплошной линией.



Зависимость скорости фильтрации от перепада давления

Второе решение, которому в выражении (20) соответствует знак минус перед корнем, является неустойчивым, и на графике обозначено штриховой линией. Существует асимметрия решения для положительных и отрицательных значений Δp. Для характеристики асимметрии течения введем величину $As = (v_+ + v_-)/v_+$, где v_+ и v_- – значения скорости при положительном и отрицательном значениях Δp. В рассмотренной области параметров величина As мала и имеет значения 0,003–0,0035. Более интенсивное движение жидкости реализуется при $p_1 > p_2$, т.е. когда течение направлено в сторону увеличения пористости среды.

Задача решалась как аналитически, так и численно на основе уравнений (16)–(17) с применением метода конечных элементов. Вычисления выполнялись для трехмерного канала квадратного сечения, с длиной, в 5 раз превышающей поперечные размеры. Результаты численного интегрирования представлены на рисунке треугольными маркерами. Течение имеет стационарный характер и с хорошей степенью точности совпадает с устойчивой ветвью аналитического решения (20). Численный счет позволяет получить только устойчивое решение.

Заключение

Получены уравнения, описывающие фильтрацию в неоднородной пористой

среде. В отличие от уравнения Форцгеймера в уравнение (16) входит дополнительное слагаемое, содержащее градиент пористости. Приведенные результаты свидетельствуют о наличии асимметрии течения жидкости в неоднородной пористой среде. Скорость фильтрации в направлении градиента пористости больше, чем в противоположном направлении. В исследуемой задаче при выбранных параметрах эффект асимметрии оказывается слабым – различие в скоростях составляет десятые доли процента. Анализ уравнений (16) и их решения (20) свидетельствует о том, что величина эффекта асимметрии должна зависеть от многих параметров: от величины градиента пористости, параметра Дарси, от того, как зависит проницаемость от пористости, как связаны просветность и пористость и др. Влияние этих факторов требует специального исследования.

Список литературы

1. Голубев Г.В., Тумашев Г.В. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. – Казань: Казан. ун-т, 1972. – 195 с.

2. Ганиев О.Р. Влияние периодического воздействия на осредненное течение в неоднородной пористой среде, насыщенной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. – 2006. –№ 2. – С. 98–104.

3. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.

4. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостехиздат, 1960. – 250 с.

5. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. – Springer-Verlag, 1992. – 408 p.

References

1. Golubev G.V., Tumashev G.V. Fil'tracija neszhimaemoj zhidkosti v neodnorodnoj poristoj srede. Kazan': Kazan. un-t, 1972. 195 p.

2. Ganiev O.R. Vlijanie periodicheskogo vozdejstvija na osrednennoe techenie v neodnorodnoj poristoj srede, nasyshhennoj zhidkost'ju // Izv. RAN. MZhG. 2006. no. 2. pp. 98–104.

3. Romm E.S. Strukturnye modeli porovogo prostranstva gornyh porod. L.: Nedra, 1985. 240 p.

4. Shejdegger A.Je. Fizika techenija zhidkostej cherez poristye sredy. M.: Gostehizdat, 1960. 250 p.

5. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Springer-Verlag, 1992. 408 p.

Рецензенты:

Тарунин Е.Л., д.ф.-м.н., профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь;

Смородин Б.Л., д.ф.-м.н., профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.

Работа поступила в редакцию 16.12.2013.