

УДК 532:536

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ЭФФЕКТОМ «ОТВЕРДЕВАНИЯ» ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ВТОРОЙ СХЕМЫ ТЕЧЕНИЯ

¹Колодежнов В.Н., ²Капранчиков С.С., ¹Веретенников А.С.

¹ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», Воронеж;

²ФГКВБОУ ВПО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, e-mail: kvn117@mail.ru

Рассмотрена вторая схема течения в цилиндрическом канале для жидкости, реологическая модель которой учитывает проявление упрочнения при сдвиге или эффекта «отвердевания». В соответствии с реологической моделью для такой схемы течения канал разбивали на две зоны с псевдопластическим и дилатантным поведением жидкости. Для такого варианта течения рассмотрена задача установившегося конвективного теплопереноса с учетом диссипации механической энергии. При этом на стенке канала ставились температурные граничные условия первого рода. Конвективный теплоперенос вдоль оси канала определяли по средней скорости потока. Диссипативную составляющую принимали с учетом точного распределения скорости в поперечном сечении канала. Получено выражение для распределения температуры в канале. Проведены численные эксперименты и анализ влияния параметров модели на характеристики процесса диссипативного разогрева. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании течения неньютоновских жидкостей такого рода в проточных элементах технологического оборудования.

Ключевые слова: диссипация, неньютоновская жидкость, температура, эффект «отвердевания», упрочнение при сдвиге

MATHEMATICAL MODELING OF DISSIPATIVE HEATING IN A CYLINDRICAL CHANNEL FOR FLUID EFFECT OF THE «SOLIDIFICATION» AT THE REALIZATION OF THE SECOND SCHEME CURRENT

¹Kolodezhnov V.N., ²Kapranchikov S.S., ¹Veretennikov A.S.

¹Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education

«Voronezh State University of Engineering Technologies», Voronezh;

²Federal State Military Institution of Higher Professional Education «Military Educational and Scientific Center of the Air Force, «Air Force Academy named professor N.E. Zhukovsky and U.A. Gagarin», Voronezh, e-mail: kvn117@mail.ru

Consider the second flow pattern in a cylindrical channel for fluid rheological model which takes into account the manifestation of shear thinning fluid (STF) or the effect of «solidification». In accordance with the rheological model for such scheme currents the flow region is divided into two zones with pseudoplastic and dilatant fluid behavior. For this scheme we consider the problem of steady flow of convective heat transference, taking into account the dissipation of mechanical energy. For this there were placed at the channel the wall temperature boundary condition of the first kind. Convective heat transference along the axis of the channel is determined by the average flow velocity. Dissipative component taken into account with the exact velocity distribution in the channel cross section. An expression for the temperature distribution in the channel. Numerical experiments and analysis of the impact of model parameters on the characteristics of the process of dissipative heating. The obtained results can be used for modeling the flow of non-Newtonian fluids of such elements in the flow of the process equipment.

Keywords: dissipation, non-Newtonian fluid, temperature, the effect of «solidification, shear thickening fluid

В работе [1] была предложена реологическая модель жидкости, которая при определенных значениях скоростей сдвига демонстрирует проявление эффекта «отвердевания». В [2] рассмотрена задача о течении такого рода жидкости в цилиндрическом канале. Там же было показано, что в зависимости от диапазона изменения перепада давления могут быть реализованы три схемы течения. Задача о конвективном теплопереносе для первой схемы течения, когда жидкость всюду внутри канала демонстрирует псевдопластическое поведение со степенным законом вязкости, была рассмотрена в [3]. В данной работе рассматривается подобная задача, но для второй схемы течения.

В [1] было показано, что вторая схема течения реализуется при значениях перепада давления Δp на длине L цилиндрического канала радиуса R , которое удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{2 \cdot L \cdot K_1 \cdot \dot{\gamma}_1^{n_1}}{R} \leq \Delta p \leq \frac{2 \cdot L \cdot \tau_2}{R},$$

где τ_2 – константа реологической модели суспензии, представляющая собой предельное значение касательного напряжения; K_1 , n_1 , $\dot{\gamma}_1$ – коэффициент консистенции, индекс течения и пороговое значение скорости сдвига соответственно.

При этом область течения в канале разбивается на две зоны – псевдопластического течения в центральной части и дилатантного

в окрестности стенки. Граница раздела между зонами течения представляет собой цилиндрическую поверхность радиуса $R_{\mu 1} < R$.

Дальнейшее увеличение Δp и, соответственно, выполнение условия

$$\Delta p > \frac{2 \cdot L \cdot \tau_2}{R}$$

приводит к формированию в окрестности стенки канала третьей зоны течения, заполненной «отвердевшей» жидкостью.

Рассмотрим вторую схему течения в цилиндрическом канале жидкости демонстрирующей эффект «отвердевания». Согласно реологической модели, представленной в [1], в данном случае вязкость жидкости на некотором интервале изменения скорости сдвига уменьшается, а на другом – по мере увеличения модуля скорости сдвига возрастает до некоторого максимального значения.

Решение задачи по нахождению распределения температур с учетом разбиения области течения на зоны предлагается искать в виде

$$T^{(k)}(r, z) = \begin{cases} T^{(1)}(r, z), & |r| < R_{\mu 1}; \\ T^{(2)}(r, z), & R_{\mu 1} \leq |r| \leq 1, \end{cases}$$

где $T^{(k)}(r, z)$ – распределения температур жидкости в зонах течения, представляющие собой неизвестные функции радиальной r и продольной z координат.

Здесь и далее верхний индекс k в круглых скобках принимает значения $k = 1$ или $k = 2$ соответственно для первой и второй зон течения.

Решение поставленной задачи проводилось в безразмерном виде, с учетом соотношений, представленных в [3]. При этом гидродинамическая часть задачи решалась отдельно от тепловой. Выражения для распределения скоростей по сечению цилиндрического канала, а также средней скорости и объемного расхода, с учетом разбиения на зоны, представлены в работе [1]. В ходе решения этой части задачи было получено выражение для определения границы раздела зон течения

$$R'_{\mu 1} = \frac{R_{\mu 1}}{R} = \frac{8}{G \cdot La \cdot (1 + B)};$$

$$G = \frac{2 \cdot R}{L}; \quad La = \frac{2 \cdot \Delta p}{\tau_2};$$

$$B = \frac{\tau_2}{K_1 \cdot (\dot{\gamma}_1)^{n_1}} - 1,$$

где G, La – геометрический критерий подобия и критерий подобия Лагранжа.

Здесь и далее верхним штрихом обозначены безразмерные величины.

Предполагалось, что конвективный теплоперенос вдоль оси канала допустимо определять по средней скорости u_m потока. Диссипативную же составляющую принимали с учетом точного распределения скорости [2] в поперечном сечении канала. С учетом этих допущений уравнение конвективного теплопереноса [4] в цилиндрическом канале с учетом диссипации в безразмерной форме может быть представлено в виде

$$S_1 \cdot u'_m \cdot \frac{\partial T'}{\partial z'} = S_2 \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + W'(r'); \quad (1)$$

$$W'(r') = \tau'_{rz} (\dot{\gamma}') \cdot \dot{\gamma}';$$

$$S_1 = \frac{G \cdot Re}{2 \cdot Ec \cdot La}; \quad S_2 = \frac{2}{Pr \cdot Ec \cdot La};$$

$$T' = \frac{T - T_*}{T_{**} - T_*}; \quad u'_m = \frac{u_m}{u_s};$$

$$r' = \frac{r}{R}; \quad z' = \frac{z}{L}; \quad \dot{\gamma}' = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_2} = \frac{du'}{dr'}; \quad \tau'_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\Delta p};$$

$$Pr = \frac{\mu_s \cdot c}{\lambda} = \frac{\tau_2 \cdot c}{\lambda \cdot \dot{\gamma}_2};$$

$$Ec = \frac{u_s^2}{c \cdot (T_{**} - T_*)} = \frac{R^2 \cdot \dot{\gamma}_2^2}{c \cdot (T_{**} - T_*)};$$

$$Re = \frac{2 \cdot \rho \cdot u_s \cdot R}{\mu_s} = \frac{2 \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \dot{\gamma}_2^2}{\tau_2};$$

$$u_s = R \cdot \dot{\gamma}_2; \quad \mu_s = \frac{\tau_2}{\dot{\gamma}_2},$$

где S_1, S_2 – параметры уравнения, определяемые через основные критерии подобия; $T = T(r, z)$ – температура жидкости в канале, представляющая собой неизвестную функцию радиальной и продольной координат; $\tau_{rz}, \dot{\gamma}_2$ – касательное напряжение и пороговое значение скорости сдвига; T_{**}, T_*, u_s, μ_s – некоторые характерные значения температуры среды в канале, а также скорости жидкости и динамической вязкости, принимаемые в качестве масштабных; ρ, c, λ – принимаемые постоянными плотность, теплоемкость, теплопроводность среды соответственно; Pr, Ec, Re – критерии подобия Прандтля, Эккерта и Рейнольдса соответственно.

С учетом реологической модели [1] выражения для касательных напряжений записываются в виде

$$\tau'_{rz}(\dot{\gamma}') = \begin{cases} \tau'^{(1)}_{rz}(\dot{\gamma}'); & 0 \leq \dot{\gamma}' < \dot{\gamma}'_1; \\ \tau'^{(2)}_{rz}(\dot{\gamma}'); & \dot{\gamma}'_1 < \dot{\gamma}' \leq 1; \end{cases}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(\dot{\gamma}') = -\frac{2 \cdot (-\dot{\gamma}')^{n_1}}{La \cdot (1+B) \cdot (\dot{\gamma}')^{n_1}};$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(\dot{\gamma}') = -\frac{2}{La \cdot (1+B)} \cdot \left\{ 1 + B \cdot \left[1 - \left(\frac{1+\dot{\gamma}'}{1-\dot{\gamma}'} \right)^{n_2} \right] \right\};$$

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot (1-\dot{\gamma}')}{B \cdot \dot{\gamma}'},$$

где n_2 – параметр реологической модели.

Принимая во внимание полученные выражения для касательных напряжений, диссипативная функция $W'(r')$ представляется в виде

$$W'(r') = \begin{cases} W^{(1)}(r'), & |r'| < R'_{\mu 1}; \\ W^{(2)}(r'), & R'_{\mu 1} \leq |r'| \leq 1. \end{cases}$$

Учитывая выражение для распределения скорости в первой зоне [2], находим

$$W^{(1)}(r') = S_3 \cdot (r')^{\frac{1}{n_1+1}};$$

$$S_3 = \dot{\gamma}' \cdot \left(\frac{La \cdot (1+B) \cdot G^{n_1+1}}{2^{2 \cdot n_1+3}} \right)^{\frac{1}{v_1}}.$$

Прямое определение диссипативной функции для второй зоны в аналитическом

$$T^{(k)}(r', z') = f^{(k)}(r') + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot J_0(\varepsilon_j \cdot r') \cdot \exp(-S_4 \cdot \varepsilon_j^2 \cdot z') \quad (6)$$

$$S_4 = \frac{S_2}{S_1 \cdot u'_m},$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [5]; ε_j – корни характеристического уравнения $J'_0(\varepsilon) = 0$; C_j – коэффициенты разложения.

$$f^{(1)}(r') = -\frac{S_3 \cdot n_1^2}{S_2 \cdot (1+3 \cdot n_1)^2} \cdot (r')^{\frac{1}{n_1+3}} + C_2^{(1)};$$

$$f^{(2)}(r') = T'_w + \frac{1}{S_2} \cdot \sum_{i=0}^l \frac{w_i}{(i+2)^2} \cdot [1 - (r')^{i+2}] + C_1^{(2)} \cdot \ln|r'|;$$

$$C_1^{(2)} = \frac{1}{S_2} \cdot \sum_{i=0}^l \frac{w_i}{(i+2)^2} \cdot (R'_{\mu 1})^{i+2} - \frac{S_3 \cdot n_1^2}{S_2 \cdot (1+3 \cdot n_1)} \cdot (R'_{\mu 1})^{\frac{1}{n_1+3}};$$

$$C_2^{(1)} = T'_w + \frac{1}{S_2} \cdot \sum_{i=0}^l \frac{w_i}{(i+2)^2} \cdot [1 - (R'_{\mu 1})^{i+2}] +$$

$$+ C_1^{(2)} \cdot \ln|R'_{\mu 1}| + \frac{S_3 \cdot n_1^2}{S_2 \cdot (1+3 \cdot n_1)^2} \cdot (R'_{\mu 1})^{\frac{1}{n_1+3}}.$$

виде представляется затруднительным. В этой связи представим диссипативную функцию в виде интерполирующего полинома порядка l :

$$W^{(2)}(r') \approx W_{\text{int}}^{(2)}(r') = \sum_{i=0}^l w_i (r')^i,$$

где w_i – коэффициенты полинома.

При решении задачи использовались следующие температурные граничные условия:

$$r' = 0; \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r'} = 0; \quad (T^{(1)} \neq \infty); \quad (2)$$

$$r' = R'_{\mu 1}; \quad T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r'} = \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r'}; \quad (3)$$

$$r' = 1; \quad T^{(2)} = T'_w; \quad (4)$$

$$z' = 0; \quad T^{(1)} = T^{(2)} = T'_0; \quad (5)$$

$$T'_0 = \frac{T_0 - T_*}{T_{**} - T_*}; \quad T'_w = \frac{T_w - T_*}{T_{**} - T_*},$$

где T_0 – температура жидкости на входе в канал; T_w – принимаемая постоянной температура стенки канала.

Решая (1) с учетом граничных условий (2)–(5), распределение температуры в канале может быть представлено в виде

Для краткости записи в (6) приняты следующие обозначения:

$$f^{(k)}(r') = \begin{cases} f^{(1)}(r'), & |r'| < R'_{\mu 1}; \\ f^{(2)}(r'), & R'_{\mu 1} \leq |r'| \leq 1; \end{cases}$$

Учитывая условие ортогонально-разложения C_j в выражении (6) принятии базисных функций, коэффициенты имеют вид

$$C_j = \frac{2}{J_1^2(\varepsilon_j)} \cdot \left[\int_0^{R'_{\mu 1}} r' \cdot J_0(\varepsilon_j \cdot r') \cdot [T'_0 - f^{(1)}(r')] dr' - \int_{R'_{\mu 1}}^1 r' \cdot J_0(\varepsilon_j \cdot r') \cdot [T'_0 - f^{(2)}(r')] dr' \right],$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка [5].

С полученными выражениями для распределения температуры в канале были проведены численные эксперименты по анализу влияния параметров математической модели на характеристики теплопереноса. В качестве базовых параметров модели были приняты следующие значения: $n_1 = 0,7$; $\dot{\gamma}'_1 = 0,8$; $B = 0,752$; $n_2 = 0,233$;

$G = 0,133$; $Pr = 2,476 \cdot 10^5$; $Ec = 1,731 \cdot 10^{-6}$; $La = 50$; $Re = 2,07 \cdot 10^{-3}$; $T'_w = 0$; $T'_0 = 0$. Заметим, что для данного набора параметров вторая схема течения реализуется при условии изменения критерия подобия Лагранжа в диапазоне от $La_1 = 34,247$ до $La_2 = 60$.

Для примера на рис. 1 представлено распределение безразмерной температуры по радиальной координате в различных поперечных сечениях канала.

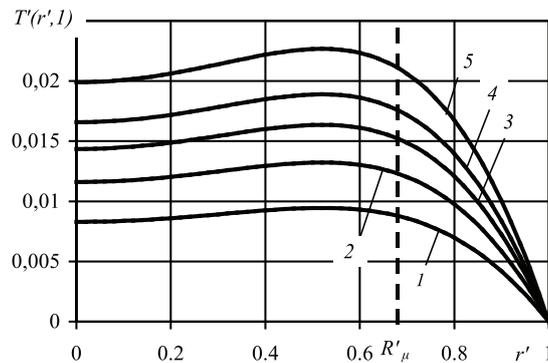


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры в различных поперечных сечениях канала для $z' = 0,05$ (1); $0,1$ (2); $0,2$ (3); $0,4$ (4); $0,6$ (5); $0,8$ (6); 1 (7)

Штриховой линией на этом и следующем рисунках отмечена граница раздела $r' = R'_{\mu 1}$ первой и второй зон течения. Из зависимостей, представленных на рис. 1, видно, что по мере течения жидкости по цилиндрическому каналу происходит ее прогрев за счет диссипации механической энергии.

При этом наблюдается экстремум температуры, который по мере продвижения жидкости по каналу смещается из второй в первую зону течения.

На рис. 2 представлено влияние критерия подобия Эккерта на распределение температуры в выходном сечении канала.

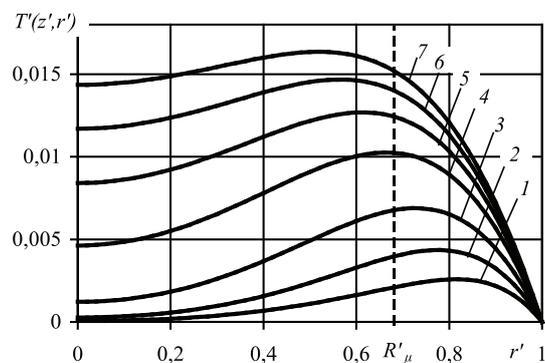


Рис. 2. Влияние критерия подобия Эккерта на распределение температуры в выходном сечении канала при $Ec = 1 \cdot 10^{-6}$ (1); $1,4 \cdot 10^{-6}$ (2); $1,731 \cdot 10^{-6}$ (3); $2 \cdot 10^{-6}$ (4); $2,4 \cdot 10^{-6}$ (5)

Из представленных данных следует, что увеличение значений критерия подобия Эккерта приводит к более интенсивному диссипативному разогреву жидкости, который сопровождается появлением пика температуры в первой зоне течения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-08-00629.

Список литературы

1. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование реологического поведения нелинейно-вязких жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта «отвердевания» // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2012. – № 4. – С. 35–38.
2. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование течения в цилиндрическом канале жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта «отвердевания» // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9. № 2. – С. 118–122.
3. Колодежнов В.Н., Капранчиков С.С., Веретенников А.С. Математическое моделирование диссипативного разогрева в цилиндрическом канале для жидкости, демонстрирующей проявление эффекта «отвердевания», при реализации первой схемы течения // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10. – С. 21–24.
4. Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. – Киев.: Наукова думка, 1990. – 216 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука. 1977. – 344 с.

References

1. Kolodezhnov V.N. Mathematical modeling of the rheological behavior of nonlinear-viscous liquids, which show a manifestation of the effect «solidification» // Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies. 2012. Vol. 4. pp. 35–38.
2. Kolodezhnov V.N. Mathematical modeling of fluid in a cylindrical channel, which shows a manifestation of the effect «solidification» // Proceedings of the Voronezh state technical University. 2013. Vol. 9. no. 2. pp. 118 – 122.
3. Kolodezhnov V.N., Kapranchikov S.S., Veretennikov A.S. Mathematical modeling of dissipative heating in a cylindrical fluid passages that demonstrates the manifestation of the «solidification» AT the realization of the first scheme current // Technical Sciences, Vol .10, 2013. pp. 21–24.
4. Frojsteter G.B., Danilevich S.Ju., Radionova N.V. Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in pipes. Kiev, Naukova dumka, 1990. 216 p.
5. Janke E., Jemde F., Ljosh F. Special functions. Moscow, Nauka, 1977. 344 p.

Рецензенты:

Шашкин А.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Математический и прикладной анализ», ГОУ ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж;

Буховец А.Г., д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и применение математических методов в экономике», ГОУ ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I», г. Воронеж.

Работа поступила в редакцию 10.12.2013.