

УДК 539.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ СОЕДИНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ МКЭ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Николаев А.П., Киселёв А.П., Гуреева Н.А., Киселёва Р.З., Леонтьева В.В.

ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет»,

Волгоград, e-mail: vhs2010@yandex.ru

Для определения напряженно-деформированного состояния в зонах пересечения произвольно нагруженных оболочек вращения на основе метода конечных элементов используется ранее разработанный объемный шестигранный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных. Для конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек вращения из однородного материала, получены соотношения между узловыми неизвестными одной оболочки, принятой за основную, и узловыми неизвестными другой оболочки, примыкающей к основной. На основе полученных соотношений выполнены преобразования матриц жесткости и векторов узловых нагрузок конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек вращения. На основе анализа результатов расчета можно сделать вывод о корректности алгоритма определения напряженно-деформированного состояния в зонах сочленения оболочек вращения при произвольном нагружении.

Ключевые слова: МКЭ, произвольно нагруженные оболочки вращения, объёмный шестигранный конечный элемент, узловые неизвестные, условия на границе пересечения оболочек

**DETERMINATION OF STRESS IN THE SHELL OF REVOLUTION JOINTS BASED
ON THE METHOD OF FINITE ELEMENTS AT ARBITRARY LOADING**

Nikolaev A.P., Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Leonteva V.V.

Volgograd state agricultural academy, Volgograd, e-mail: vhs2010@yandex.ru

To determine the stress-strain state in the areas of intersection of arbitrarily loaded shells of revolution based on the finite element method used previously developed three-dimensional octagonal finite element with nodal unknowns in the form of displacement and its derivatives. For the finite element adjacent to the border junction of shells of revolution, obtained the relation between the nodal unknowns one shell, adopted for the main and the nodal unknowns another shell adjacent to the main one. On the basis of these relations made the transformation matrix stiffness and load vectors of nodal finite elements adjacent to the boundary junction of shells of revolution. Based on the analysis of the calculation results can be concluded about the correctness of the algorithm for determining the stress-strain state in the areas sochlineniya shells of revolution under arbitrary loading.

Keywords: finite element method, arbitrarily loaded shells of revolution, surrounds hexagonal finite element, the nodal unknowns, the conditions at the border crossing membranes

Из-за сложности решения дифференциальных уравнений, описывающих деформированное состояние оболочек вращения, большое распространение получили численные методы определения их напряженно-деформированного состояния. Среди численных методов особое место занимает метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках: в формулировке метода перемещений разрабатывались конечные элементы в двумерной постановке [1, 6] и в трехмерной постановке [4]; в смешанной формулировке использовались объемные конечные элементы [2]. Объемные конечные элементы в формулировке метода перемещений успешно использовались для расчета слоистых конструкций [3, 5].

В настоящей работе объемный конечный элемент в форме шестигранника адаптирован к расчету сочлененных оболочек вращения.

Матрица жесткости объёмного шестигранного конечного элемента. Для расчета произвольно нагруженной оболочки вращения в координатной системе s, θ, ζ используется шестигранный восьмиузловой конечный элемент с узлами i, j, k, l на нижней грани по координате ζ и узлами m, n, p, h на верхней грани [4].

Используемая в настоящей работе матрица жесткости объёмного шестигранного конечного элемента, формируемая на основе равенства работ внешних и внутренних сил [3, 4, 5], представляется выражением

$$[K]\{V_y\} = \{f_y\}, \tag{1}$$

где $\{V_y\}^T = \{v_y^1\}^T \{v_y^2\}^T \{v_y^3\}^T$ – вектор узловых неизвестных в криволинейной системе координат s, θ, ζ ;

$$\left\{ v_y^1 \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ v^{li} \ v^{lj} \ v^{lk} \ v^{ll} \ v^{lm} \ v^{ln} \ v^{lp} \ v^{lh} \ v_{,s}^{li} \ v_{,s}^{lj} \ v_{,s}^{lk} \ v_{,s}^{ll} \ v_{,s}^{lm} \ v_{,s}^{ln} \ v_{,s}^{lp} \ v_{,s}^{lh} \ v_{,r\theta}^{li} \ v_{,r\theta}^{lj} \ v_{,r\theta}^{lk} \ v_{,r\theta}^{ll} \ v_{,r\theta}^{lm} \ v_{,r\theta}^{ln} \ v_{,r\theta}^{lp} \ v_{,r\theta}^{lh} \ v_{,\zeta}^{li} \ v_{,\zeta}^{lj} \ v_{,\zeta}^{lk} \ v_{,\zeta}^{ll} \ v_{,\zeta}^{lm} \ v_{,\zeta}^{ln} \ v_{,\zeta}^{lp} \ v_{,\zeta}^{lh} \right\};$$

$$\left\{ v_y^2 \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ v^{2i} v^{2j} v^{2k} v^{2l} v^{2m} v^{2n} v^{2p} v^{2h} v_{,s}^{2i} v_{,s}^{2j} v_{,s}^{2k} v_{,s}^{2l} v_{,s}^{2m} v_{,s}^{2n} v_{,s}^{2p} v_{,s}^{2h} v_{,r\theta}^{2i} v_{,r\theta}^{2j} v_{,r\theta}^{2k} v_{,r\theta}^{2l} v_{,r\theta}^{2m} v_{,r\theta}^{2n} v_{,r\theta}^{2p} v_{,r\theta}^{2h} v_{,\zeta}^{2i} v_{,\zeta}^{2j} v_{,\zeta}^{2k} v_{,\zeta}^{2l} v_{,\zeta}^{2m} v_{,\zeta}^{2n} v_{,\zeta}^{2p} v_{,\zeta}^{2h} \right\};$$

$$\left\{ v_y^3 \right\}_{132}^T = \left\{ v^{3i} v^{3j} v^{3k} v^{3l} v^{3m} v^{3n} v^{3p} v^{3h} v_{,s}^{3i} v_{,s}^{3j} v_{,s}^{3k} v_{,s}^{3l} v_{,s}^{3m} v_{,s}^{3n} v_{,s}^{3p} v_{,s}^{3h} v_{,r\theta}^{3i} v_{,r\theta}^{3j} v_{,r\theta}^{3k} v_{,r\theta}^{3l} v_{,r\theta}^{3m} v_{,r\theta}^{3n} v_{,r\theta}^{3p} v_{,r\theta}^{3h} v_{,\zeta}^{3i} v_{,\zeta}^{3j} v_{,\zeta}^{3k} v_{,\zeta}^{3l} v_{,\zeta}^{3m} v_{,\zeta}^{3n} v_{,\zeta}^{3p} v_{,\zeta}^{3h} \right\};$$

[K] – матрица жесткости элемента в глобальной системе координат; {f} – вектор узловых нагрузок элемента в глобальной системе координат.

Геометрия произвольно нагруженной оболочки вращения. Положение произвольной точки M срединной поверхности произвольно нагруженной оболочки вращения в декартовой системе координат

ординат хуz определяется радиус-вектором (рис. 1)

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (2)$$

где $i = r(x)$ – радиус вращения точки M относительно оси ox; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против часовой стрелки.

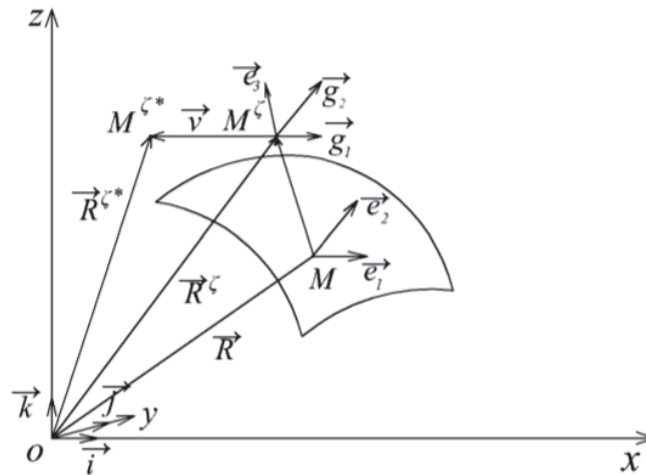


Рис. 1. Перемещение точки в результате деформирования оболочки из положения M^{ζ} в положение $M^{\zeta*}$

Векторы локального базиса точки M определяются дифференцированием выражений (2)

$$\vec{e}_1 = \vec{R}_{,s} = x_{,s}\vec{i} + r_{,s}\sin\theta\vec{j} + r_{,s}\cos\theta\vec{k};$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{r\partial\theta} = \cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k};$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = (x_{,s}\vec{i} + r_{,s}\sin\theta\vec{j} + r_{,s}\cos\theta\vec{k}) \times (\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}) = -\vec{i}r_{,s} + \vec{j}x_{,s}\sin\theta + \vec{k}x_{,s}\cos\theta, \quad (3)$$

где $r_{,s} = r_{,x}x_{,s}$ – производная радиуса вращения по дуге меридиана s.

Производные векторов локального базиса определяются дифференцированием (3) и представляются в матричном виде

$$\left\{ \vec{e}_{,s} \right\} = [l] \left\{ \vec{e} \right\};$$

$$\left\{ \vec{e}_{,r\theta} \right\} = [d] \left\{ \vec{e} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\left\{ \vec{e}_{,s} \right\}^T = \left\{ \vec{e}_{1,s} \quad \vec{e}_{2,s} \quad \vec{e}_{3,s} \right\};$$

$$\left\{ \vec{e}_{,r\theta} \right\}^T = \left\{ \vec{e}_{1,r\theta} \quad \vec{e}_{2,r\theta} \quad \vec{e}_{3,r\theta} \right\}.$$

Радиус-вектор произвольной точки оболочки M^{ζ} , отстоящей на расстоянии ζ от срединной поверхности, можно представить выражением

$$\vec{R}^{\zeta} = \vec{R} + \zeta \vec{e}_3. \quad (5)$$

Базисные векторы точки M^s определяются дифференцированием (5)

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= \bar{R}_{,s}^\zeta = (\bar{R} + \zeta \bar{e}_3)_{,s} = \bar{e}_1 + \zeta (l_{31} \bar{e}_1 + l_{32} \bar{e}_2 + l_{33} \bar{e}_3) = \\ &= \bar{e}_1 (1 + \zeta l_{31}) + \zeta l_{32} \bar{e}_2 + \zeta l_{33} \bar{e}_3; \\ \bar{g}_2 &= \frac{\partial \bar{R}^\zeta}{r \partial \theta} = \frac{\partial}{r \partial \theta} (\bar{R} + \zeta \bar{e}_3) = \bar{e}_2 + \zeta (d_{31} \bar{e}_1 + d_{32} \bar{e}_2 + d_{33} \bar{e}_3) = \\ &= \zeta d_{31} \bar{e}_1 + (1 + \zeta d_{32}) \bar{e}_2 + \zeta d_{33} \bar{e}_3; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{g}_3 = \bar{R}_{,\zeta}^\zeta = (\bar{R} + \zeta \bar{e}_3)_{,\zeta} = \bar{e}_3. \quad (7) \quad \bar{v} \text{ с компонентами в базисе точки } M \text{ срединной поверхности}$$

$$\bar{v} = v^1 \bar{e}_1 + v^2 \bar{e}_2 + v^3 \bar{e}_3 = v^i \bar{e}_i. \quad (8)$$

Произвольная точка M^s оболочки под действием заданной нагрузки займет положение M^{s*} , которое определяется вектором

Производные вектора перемещения по координатам s, r, θ, ζ с учётом (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{v}_{,s} &= (v^1 \bar{e}_1 + v^2 \bar{e}_2 + v^3 \bar{e}_3)_{,s} = v_{,s}^1 \bar{e}_1 + v^1 \bar{e}_{1,s} + v_{,s}^2 \bar{e}_2 + v^2 \bar{e}_{2,s} + v_{,s}^3 \bar{e}_3 + v^3 \bar{e}_{3,s} = \\ &= \bar{e}_1 (v_{,s}^1 + v^1 l_{11} + v^2 l_{21} + v^3 l_{31}) + \bar{e}_2 (v_{,s}^2 + v^1 l_{12} + v_{,s}^2 + v^2 l_{22} + v^3 l_{32}) + \\ &\quad + \bar{e}_3 (v_{,s}^3 + v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v_{,s}^3 + v^3 l_{33}) = t_1^1 \bar{e}_1 + t_1^2 \bar{e}_2 + t_1^3 \bar{e}_3; \\ \bar{v}_{,r\theta} &= v_{,r\theta}^1 \bar{e}_1 + v^1 \bar{e}_{1,r\theta} + v_{,r\theta}^2 \bar{e}_2 + v^2 \bar{e}_{2,r\theta} + v_{,r\theta}^3 \bar{e}_3 + v^3 \bar{e}_{3,r\theta} = \\ &= v_{,r\theta}^1 \bar{e}_1 + v^1 (d_{11} \bar{e}_1 + d_{12} \bar{e}_2 + d_{13} \bar{e}_3) + v_{,r\theta}^2 \bar{e}_2 + v^2 (d_{21} \bar{e}_1 + d_{22} \bar{e}_2 + d_{23} \bar{e}_3) + \\ &\quad + v_{,r\theta}^3 \bar{e}_3 + v^3 (d_{31} \bar{e}_1 + d_{32} \bar{e}_2 + d_{33} \bar{e}_3) = \bar{e}_1 (v_{,r\theta}^1 + v^1 d_{11} + v^2 d_{21} + v^3 d_{31}) + \\ &\quad + \bar{e}_2 (v_{,r\theta}^2 + v^1 d_{12} + v_{,r\theta}^2 + v^2 d_{22} + v^3 d_{32}) + \bar{e}_3 (v_{,r\theta}^3 + v^1 d_{13} + v^2 d_{23} + v_{,r\theta}^3 + v^3 d_{33}) = \\ &\quad t_2^1 \bar{e}_1 + t_2^2 \bar{e}_2 + t_2^3 \bar{e}_3; \\ \bar{v}_{,\zeta} &= (v^1 \bar{e}_1 + v^2 \bar{e}_2 + v^3 \bar{e}_3)_{,\zeta} = v_{,\zeta}^1 \bar{e}_1 + v_{,\zeta}^2 \bar{e}_2 + v_{,\zeta}^3 \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Геометрия в зоне пересечения произвольно нагруженных оболочек вращения из однородного материала. Рассматриваются две произвольно нагруженные оболочки вращения в координатах xyz и $x'y'z'$. Связь

между ортами этих систем считается известной (рис. 2)

$$\{\bar{i}'\} = [m] \{\bar{i}\}. \quad (10)$$

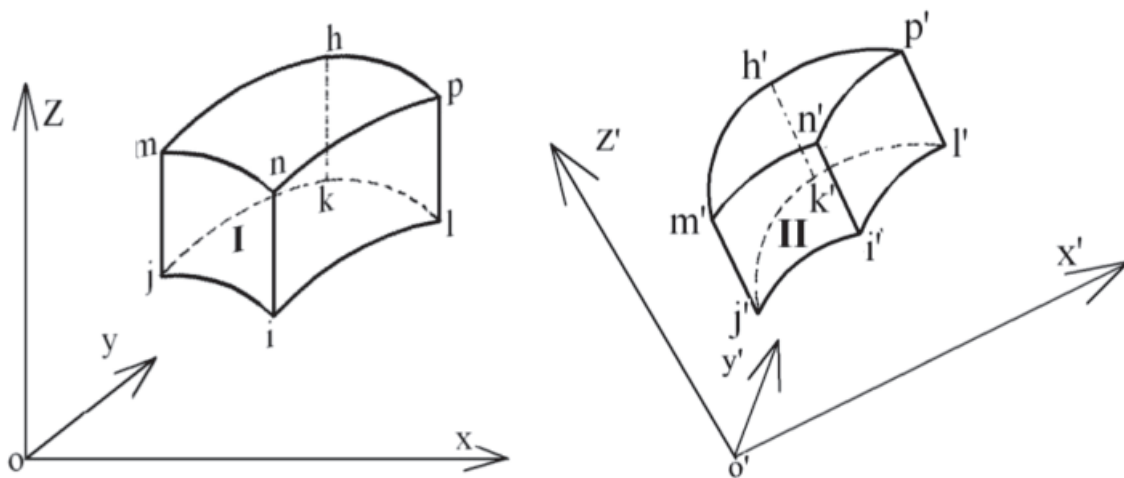


Рис. 2. Оболочки вращения в декартовых системах координат xoz и $x'o'z'$

На основании (10) определяется соотношение между векторами локальных базисов в граничной точке сочлененных оболочек

$$\{\bar{e}\} = [h]\{\bar{e}'\}. \quad (11)$$

В узлах, расположенных в плоскости пересечения оболочек, узловые неизвестные одной оболочки (элемент I) принимаются за основные (рис. 2), узловые неизвестные примыкающей оболочки (элемент II) долж-

ны быть выражены через узловые неизвестные основной оболочки. В дальнейшем величины, относящиеся к примыкающей оболочке, будут отмечаться штрихами.

Для конечных элементов, примыкающих к плоскости сочленения оболочек, выполняются перенумерации неизвестных и рассматриваются следующие векторы узловых неизвестных для основной и примыкающей оболочек

$$\{q^0\}^T = \{v^1 \ v_{,s}^1 \ v_{,r\theta}^1 \ v_{,\zeta}^1 \ v^2 \ v_{,s}^2 \ v_{,r\theta}^2 \ v_{,\zeta}^2 \ v^3 \ v_{,s}^3 \ v_{,r\theta}^3 \ v_{,\zeta}^3\}; \quad (12)$$

$$\{q^{0'}\}^T = \{v^{1'} \ v_{,s'}^{1'} \ v_{,r\theta'}^{1'} \ v_{,\zeta'}^{1'} \ v^{2'} \ v_{,s'}^{2'} \ v_{,r\theta'}^{2'} \ v_{,\zeta'}^{2'} \ v^{3'} \ v_{,s'}^{3'} \ v_{,r\theta'}^{3'} \ v_{,\zeta'}^{3'}\}, \quad (13)$$

где

$$\mathfrak{w} = k, h, p, l;$$

$$\mathfrak{w}' = i', l', m', n'.$$

Соотношения между компонентами векторов (12) и (13) определяются с использованием следующих условий:

1. Векторы перемещений в точке, расположенной в плоскости пересечения двух оболочек, равны

$$v^1 \bar{e}_1' + v^2 \bar{e}_2' + v^3 \bar{e}_3' = v^1 \bar{e}_1 + v^2 \bar{e}_2 + v^3 \bar{e}_3,$$

откуда с учётом (21) получается

$$v^{1'} = v^1 h_{11} + v^2 h_{21} + v^3 h_{31};$$

$$v^{2'} = v^1 h_{12} + v^2 h_{22} + v^3 h_{32};$$

$$v^{3'} = v^1 h_{13} + v^2 h_{23} + v^3 h_{33}. \quad (14)$$

Зависимости между производными компонент вектора перемещений для двух

оболочек на линии пересечения можно получить, используя выражения производной вектора по направлению

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial s'_\alpha} = \bar{e}'_\alpha \nabla \bar{v}, \quad (15)$$

где

$$\nabla \bar{v} = \bar{e}_\alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial s_\alpha}.$$

Используя (15), можно записать соотношения

$$\bar{v}'_{,s'} = \bar{e}'_1 \nabla \bar{v}; \quad (16)$$

$$\bar{v}'_{,r\theta'} = \bar{e}'_2 \nabla \bar{v}; \quad (17)$$

$$\bar{v}'_{,\zeta'} = \bar{e}'_3 \nabla \bar{v}. \quad (18)$$

Равенство (16) с использованием (9) запишется в виде

$$t_1^1 \bar{e}_1' + t_1^2 \bar{e}_2' + t_1^3 \bar{e}_3' = \bar{e}_1' \left[\bar{e}_1 (t_1^1 \bar{e}_1 + t_1^2 \bar{e}_2 + t_1^3 \bar{e}_3) + \bar{e}_2 (t_2^1 \bar{e}_1 + t_2^2 \bar{e}_2 + t_2^3 \bar{e}_3) + \bar{e}_3 (v_{,\zeta}^1 \bar{e}_1 + v_{,\zeta}^2 \bar{e}_2 + v_{,\zeta}^3 \bar{e}_3) \right],$$

откуда получают выражения

$$\begin{aligned} t_1^{1'} &= t_1^1 h_{11} h_{11} + t_1^2 h_{11} h_{21} + t_1^3 h_{11} h_{31} + t_2^1 h_{21} h_{11} + t_2^2 h_{21} h_{21} + t_2^3 h_{21} h_{31} + \\ &\quad + v_{,\zeta}^1 h_{31} h_{11} + v_{,\zeta}^2 h_{31} h_{21} + v_{,\zeta}^3 h_{31} h_{31}; \\ t_1^{2'} &= t_1^1 h_{11} h_{12} + t_1^2 h_{11} h_{22} + t_1^3 h_{11} h_{32} + t_2^1 h_{21} h_{12} + t_2^2 h_{21} h_{22} + t_2^3 h_{21} h_{32} + \\ &\quad + v_{,\zeta}^1 h_{31} h_{12} + v_{,\zeta}^2 h_{31} h_{22} + v_{,\zeta}^3 h_{31} h_{32}; \\ t_1^{3'} &= t_1^1 h_{11} h_{13} + t_1^2 h_{11} h_{23} + t_1^3 h_{11} h_{33} + t_2^1 h_{21} h_{13} + t_2^2 h_{21} h_{23} + t_2^3 h_{21} h_{33} + \\ &\quad + v_{,\zeta}^1 h_{31} h_{13} + v_{,\zeta}^2 h_{31} h_{23} + v_{,\zeta}^3 h_{31} h_{33}. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя выражение (9), можно выразить из (19) производные компонент вектора перемещений $v_{,s'}^{1'}$, $v_{,s'}^{2'}$, $v_{,s'}^{3'}$,

примыкающей оболочки через узловые неизвестные основной оболочки, например,

$$\begin{aligned}
 v'_{,s'} = & v^1 [l_{11} h_{11} h_{11} + l_{12} h_{11} h_{21} + l_{13} h_{11} h_{31} + l_{11} h_{21} h_{11} + l_{12} h_{21} h_{21} + l_{13} h_{21} h_{31}] \cdot l_{11} + \\
 & + v^2 [l_{21} h_{11} h_{11} + l_{22} h_{11} h_{21} + l_{23} h_{11} h_{31} + l_{21} h_{21} h_{11} + l_{22} h_{21} h_{21} + l_{23} h_{21} h_{31}] \cdot l_{21} + \\
 & + v^3 [l_{31} h_{11} h_{11} + l_{32} h_{11} h_{21} + l_{33} h_{11} h_{31} + l_{31} h_{21} h_{11} + l_{32} h_{21} h_{21} + l_{33} h_{21} h_{31}] \cdot l_{31} + \\
 & + v_{,s}^1 h_{11} h_{11} + v_{,s}^2 h_{11} h_{21} + v_{,s}^3 h_{11} h_{31} + v_{,r\theta}^1 h_{21} h_{11} + v_{,r\theta}^2 h_{21} h_{21} + v_{,r\theta}^3 h_{21} h_{31} + \\
 & + v_{,\zeta}^1 h_{31} h_{11} + v_{,\zeta}^2 h_{31} h_{21} + v_{,\zeta}^3 h_{31} h_{31}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично из равенства (17), (18) с использованием (9), получая соответствующие выражения $t_2^{n'}, t_3^{n'}$ ($n' = 1, 2, 3$), можно выразить

$$v_{,r\theta}^1, v_{,r\theta}^2, v_{,r\theta}^3, v_{,\zeta}^1, v_{,\zeta}^2, v_{,\zeta}^3.$$

На основании полученных выражений зависимость между векторами (12) и (13) запишется матричным выражением

$$\left\{ q^{\sigma'} \right\}_{12 \times 1} = [z]_{12 \times 12} \left\{ q^{\sigma} \right\}_{12 \times 1} \tag{21}$$

С использованием (21) формируется матрица $[T]$ для преобразования матриц жест-

кости и векторов узловых нагрузок конечных элементов, примыкающих к плоскости пересечения оболочек

$$\begin{aligned}
 [K'] &= [T]^T [K] [T]; \\
 \{f'\} &= [T]^T \{f\}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Пример расчета: Определялось напряженно-деформированное состояние цилиндра с эллиптическим днищем, находящегося под действием давления интенсивности q (рис. 3). Цилиндр и эллиптическое днище из однородного материала.

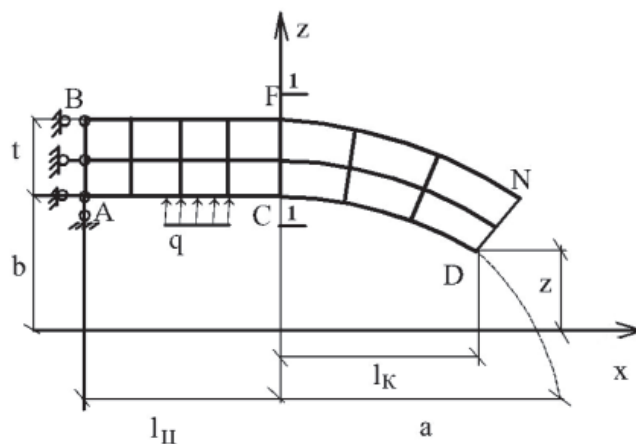


Рис. 3. Цилиндр с эллиптическим днищем, находящийся под действием давления интенсивности q

Были приняты следующие исходные данные: $b = 0,2$ м, $i = 0,01$ м, $l_{ц} = 0,2$ м, $a = 0,4$ м, $l_{к} = 0,392$ м, $z = 0,04$ м, $q = 1$ Н, $E = 2 \cdot 10^6$ МПа, $\nu = 0,3$.

По толщине цилиндр и эллиптическое днище разбивались на 2 равных дискретных элемента.

По длине цилиндр разбивалась на 10 одинаковых элементов, а эллиптическое днище – на 50 одинаковых элементов.

По полученным результатам построена эпюра нормальных напряжений σ_{ss} в сечении 1-1 (рис. 3).

Для контроля точности вычислений выполнена проверка ($\sum x = 0$), которая дает ошибку:

$$\delta = \frac{Q_{\text{внеш}} - Q_{\text{внут}}}{Q_{\text{внеш}}} \cdot 100\% \approx 0,1\%,$$

где $Q_{\text{внеш}} = q \cdot (\pi b^2 - \pi z^2)$ – равнодействующая внешних сил; $Q_{\text{внут}}$ равнодействующая внутренних сил в сечении 1-1.

Результаты проверки свидетельствуют о корректности разработанного алгоритма расчета оболочек вращения в зоне соединения при произвольном нагружении.

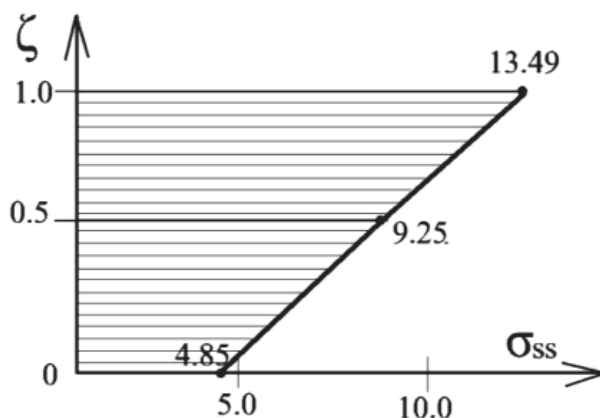


Рис. 4. Эюра нормальных напряжений σ_{ss} в сечении 1–1 цилиндра с эллиптическим дном

Список литературы

1. Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций // О.Н. Туленева, А.Ф. Шигабулинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
2. Гуреева Н.А. Восьмиугольный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейсснера // МБТУ им. Баумана, Известия вузов. – М.: Машиностроение. – № 5. – С. 23–28.
3. Гуреева Н.А. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента / Н.А. Гуреева, А.П. Киселев, Р.З. Киселева // Известия ВолгГТУ. – Волгоград- 2010. – № 4. – С. 125–128.
4. Киселев А.П. Векторная аппроксимация полей перемещений объемного шестигранного конечного элемента // Научно-техн. журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений». – М., 2007. – № 1, РУДН.
5. Киселев А.П. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемного конечного элемента / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2010. – № 1. – С. 106–112.
6. Николаев А.П.. Расчет оболочек на основе МКЭ в двумерной постановке // Ю.В. Клочков, А.П. Киселев, Н.А. Гуреева. – Волгоград, 2009. – 194 с.

References

1. Golovanov A.I., Tuleneva O.N., Shigabudinov A.F. The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures. M.: FIZMATLIT, 2006. 392 p.

2. Gureeva N.A. Octagonal in the mixed finite element formulation based on the Reissner functional // MBTU Bauman of Education News: Mechanical Engineering, M.: no. 5, pp. 23–28.

3. Gureeva N.A., Kiselev A.P., Kiseleva R.Z. Calculation of multilayer cladding surround the finite element a News VolgGTU. Volgograd, 2010. no. 4, pp. 125–128.

4. Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Calculation of multilayer shells of revolution and plates surround the finite element. Math. Universities, Ser. «Construction». 2010. no.1, pp. 106–112.

5. Kiselev A.P. Vector approximation of displacement fields surround hexagonal finite element Scientific and Technical journal «Structural Mechanics engineering structures and buildings». no. 1, People's Friendship University, Moscow, 2007.

6. Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A. Calculation of shells on the basis of a two-dimensional finite element formulation. Volgograd, 2009. 194 p.

Рецензенты:

Беликов Г.И., д.т.н., профессор кафедры «Соппротивление материалов», ФООГУ «Волгоградский архитектурный университет» Министерство образования и науки, г. Волгоград;

Ахмедов А.Д., д.т.н., профессор кафедры «Кадастр недвижимости и геодезии», ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет», г. Волгоград.

Работа поступила в редакцию 03.09.2013.