

УДК 539.3

ОБ УТОЧНЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЛИЯНИЯ ЖИДКОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Тер-Акопянц Г.Л.

*СПбГМТУ «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»,
Санкт-Петербург, e-mail: office@smtu.ru.*

Рассмотрено свободное распространение упругих волн в бесконечной тонкой цилиндрической оболочке, заполненной несжимаемой идеальной жидкостью. Проанализированы изгибные (балочные) и неосесимметричные формы колебаний. На основе динамических уравнений моментной теории оболочек получено дисперсионное уравнение. Найдены зависимости осевых волновых чисел от частоты (дисперсионные кривые) для нескольких первых значений окружных волновых чисел. Найдены диапазоны частот, при которых появляются чисто мнимые корни дисперсионного уравнения, что соответствует появлению распространяющейся волны. Предложено уточнение приближенного вычисления присоединенных масс и проанализировано его влияние на осевые волновые числа в сравнении с применяемым ранее приближенным вычислением и точным решением. Приведено сопоставление результатов для оболочки с жидкостью и без жидкости. Установлено, что наличие жидкости смещает частотный диапазон распространения волн и частоты отсечки затухающих волн в сторону более низких частот. Проанализировано влияние предлагаемого уточнения при вычислении присоединенных масс на частоты отсечки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, распространение волн, волновые числа, частота отсечки

CLARIFYING THE RESULTS OF INFLUENCE OF FLUID ON THE PROPAGATION OF WAVES IN ELASTIC CYLINDRICAL SHELL

Ter-Akopyants G.L.

*SPbGMTU « State Marine Technical University of St.-Petersburg»,
Sankt-Petersburg, e-mail: office@smtu.ru*

Are considered the free propagation of elastic waves in an infinite thin cylindrical shell loaded by an incompressible ideal fluid. Are analyzed bending (beam mode) and asymmetrical about the axis waveform. On the basis of the dynamic equations of the couple-stress theory of shells is obtained and is numerically solved dispersion equation. Are dependences of the axial wavenumber of frequency (dispersion curves) for the first few values of the number of circumferential waves. Are found the frequency bands in which there are purely imaginary roots of the dispersion equation that corresponds to the appearance of a propagating wave. Are proposed clarification of the approximate calculation of added masses and analyzed its impact on the axial wave numbers in comparison with used previously approximate calculation and exact solution. Are compared of the results for the shell loaded by an fluid and for empty shell. It is established that the presence of fluid change frequency range of propagating waves and the cut-on frequency of the attenuated waves in the direction of lower frequencies. Are analyzed the impact of the proposed clarification when calculating the added masses on the cut-on frequency.

Keywords: cylindrical shell, propagation of waves, wave number, cut-on frequency

Рассматривается бесконечная цилиндрическая оболочка толщины h с радиусом средней поверхности R . Колебания такой оболочки

под нагрузкой, плотность которой обозначим p_1, p_2, p_n соответственно, можно описать, следуя [1, 2, 4], уравнениями:

$$\mathbf{L} \vec{u} = \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ p_n \end{pmatrix} + \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \text{вектор перемещения с осевой, окружной и радиальной компонентами}$$

соответственно (знак «+» перед p_n и знак «-» перед последней компонентой инерционного члена говорит о том, что положительным считается перемещение по направлению к центру кривизны); ρ – плотность материала оболочки; E – модуль Юнга; ν –

коэффициент Пуассона, $a = \frac{h^2}{12R^2}$.

коэффициент Пуассона, $a = \frac{h^2}{12R^2}$.

При рассмотрении задачи по моментной теории оболочек матрица оператора L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} & \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} & \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} & \frac{1-\nu}{2}(1+4a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1+a}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{a}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \phi} - a \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} & \frac{1}{R^2} + a \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 \end{pmatrix} \cdot (2)$$

Перейдём к безразмерной осевой координате $\xi = \frac{x}{R}$ и домножим на R^2 систему (1). Матрица полученной системы примет вид

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \phi} & \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \phi} & \frac{1-\nu}{2}(1+4a) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} & \frac{\partial}{\partial \phi} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \phi} - a \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \\ \nu \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \phi} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \phi} - a \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} & 1 + a \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 \end{pmatrix} \cdot (3)$$

Будем искать решения преобразованной таким образом системы (1) в виде

$$\vec{u} = \sum_m \vec{u}_m(\xi, \phi, t), \quad (4)$$

где $\vec{u}_m = \vec{u}_m(\xi, \phi, t) = (u_m(\xi, \phi, t), v_m(\xi, \phi, t), w_m(\xi, \phi, t))^T$.

Компоненты \vec{u}_m примем в виде

$$\vec{u}_m = (U_m e^{k\xi - i\Omega t} \cos(m\phi), V_m e^{k\xi - i\Omega t} \sin(m\phi), W_m e^{k\xi - i\Omega t} \cos(m\phi))^T, \quad (5)$$

где Ω – частота; $k = \lambda R$ – приведенное осевое волновое число; λ – осевое волновое число; m – окружное волновое число (число окружных волн), принимающее значения $m = 1, 2, 3, \dots$. Случай $m = 0$ (осесимметричные колебания) является предметом отдельного исследования и здесь не рассматривается.

Такой подход позволит искать решение задачи для каждого фиксированного значения окружного волнового числа m независимо.

Предположим, что оболочка заполнена жидкостью, движение которой описывается (см. [1]) уравнением для потенциала скоростей

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c_{fl}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

где c_{fl} – скорость звука в жидкости.

Выберем модель несжимаемой жидкости, в этом случае будем считать $c_{fl} \rightarrow \infty$.

Условия «непротекания» на границе жидкость-оболочка имеют вид

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7)$$

Наличие жидкости учтем в составе p_n уравнения (1а), а p_1 и p_2 считаем равными нулю.

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\phi(x, \phi, r, t) = \sum_m \phi_m(r) e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\phi). \quad (8)$$

Это позволит также искать решение независимо для каждого значения m . Подстановка (8) в (6) с учётом $c_{fl} \rightarrow \infty$ приводит к уравнению Бесселя

$$\phi_m''(r) + \frac{1}{r} \phi_m'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \phi_m(r) = 0. \quad (9)$$

Его решение имеет вид

$$\phi_m(r) = C_{1m} I_m(r\lambda) + C_{2m} Y_m(r\lambda), \quad (10)$$

где C_{1m} и C_{2m} – некоторые константы; $I_m(r\lambda)$ и $Y_m(r\lambda)$ – модифицированные функции Бесселя (см. [3]).

Из-за ограниченности потенциала скоростей при $r \rightarrow 0$ имеем $C_{2m} = 0$, тогда подстановка (8) в (7) с учетом (5) позволяет

$$p_n = -\sum_m \varphi_m(R) \rho_{fl} \frac{\partial}{\partial t} (e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\phi)) = \sum_m \Omega^2 \rho_{fl} \frac{W_m I_m(R\lambda)}{\left. \frac{\partial I_m(r\lambda)}{\partial r} \right|_{r=R}} (e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\phi)), \quad (11)$$

где ρ_{fl} – плотность жидкости.

Таким образом, в правую часть последнего уравнения системы войдет

$$\sum_m \frac{(1-\nu^2) R^2}{Eh} \Omega^2 \rho_{fl} \frac{W_m I_m(R\lambda)}{\left. \frac{\partial I_m(r\lambda)}{\partial r} \right|_{r=R}} e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\phi) = \sum_m \omega^2 \frac{\rho_{fl} R}{\rho h} \frac{I_m(k)}{\left. \frac{\partial I_m(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1}} W_m e^{k\zeta - i\Omega t} \cos(m\phi), \quad (12)$$

где $\tilde{r} = r/R$; $\omega = \sqrt{\rho \frac{1-\nu^2}{E}} R\Omega$ – приведённая частота.

Перенесем правые части преобразованной системы (1) налево, подставим в полученные соотношения формулы (4) с учетом (5) и (12), уберем символ \sum_m и разделим все

найти C_{1m} , затем $\phi_m(R)$ и получить окончательно давление жидкости на стенку оболочки в виде

уравнения на $e^{k\zeta - i\Omega t} \cos(m\phi)$. Тогда получим матричное уравнение

$$L^* \vec{U}_m = 0, \quad (13)$$

где $\vec{U}_m = (U_m, V_m, W_m)^T$, с матрицей оператора L^* в виде

$$L^* = \begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} (1+4a)k^2 - (1+a)m^2 + \omega^2 & -m + a(2-\nu)k^2 m - am^3 \\ \nu k & m - a(2-\nu)k^2 m + am^3 & 1 + a(k^2 - m^2)^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{\rho_{fl} R}{\rho h} \frac{I_m(k)}{\left. \frac{\partial I_m(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1}} \right) \end{pmatrix} \quad (14)$$

В отсутствие жидкости (пустая оболочка) в L^* надо принять $\rho_{fl} = 0$. Приравнивание к нулю определителя матрицы L^* приводит к уравнению 8-го порядка для k .

$$a_8 k^8 + a_6 k^6 + a_4 k^4 + a_2 k^2 + a_0 = 0, \quad (15)$$

коэффициенты которого очевидным образом получаются из (14).

При отсутствии жидкости левая часть является многочленом 8 порядка, а при наличии жидкости – нет, так как коэффициенты a_4 , a_2 и a_0 зависят от k .

Для оболочки с жидкостью обсудим вопрос об аппроксимации при $k \geq 0$ выражения

$$f_m(k) = \frac{I_m(k)}{\left. \frac{\partial I_m(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1}}. \quad (16)$$

Разложение функции (16) в ряд Тейлора по степеням k при $m = 1, 2, 3 \dots$ позволяет при малых k в качестве нулевого приближения взять, как это принято в [4],

$$f(k) = 1/m. \quad (17)$$

Однако для k по модулю больших 1 недостаточно даже трёх первых ненулевых членов разложения (то есть до k^4), ибо отбрасываемая часть не будет являться малой, а взять большее количество членов ряда не позволяет 8-й порядок уравнения (15).

Расчёт при точных значениях $f_m(k)$ возможен с помощью применения схемы итерационного типа, когда при нахождении k на последующем по ω шаге в $f_m(k)$ вводятся значения k с предыдущего шага, а значения k при $\omega = 0$ по-прежнему являются корнями многочлена 8 степени, так как при $\omega = 0$, для любого $m = 1, 2, 3, \dots$ $f_m(k) = \frac{1}{m}$. Однако такой расчёт требует больших вычис-

лительных ресурсов. Поэтому предлагается достаточно простая аппроксимация (18) для $f_m(k)$, не отменяющая итерационной схемы, но более экономная по ресурсам. Она получена чисто эмпирическим путём:

$$f_m(k) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + k^2}}. \quad (18)$$

Близость получающихся при этом значений $f_m(k)$ при $m = 1$ и $m = 2$ иллюстрирует рис. 1.

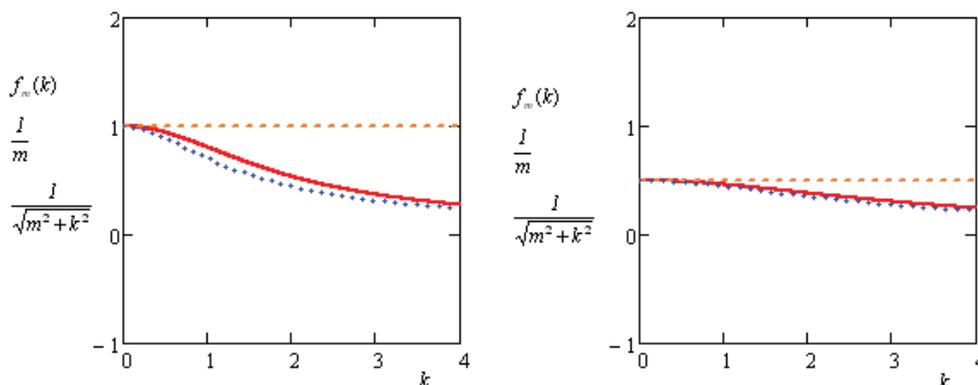


Рис. 1. Точные значения $f_m(k)$ – красная сплошная линия, нулевое приближение – оранжевая пунктирная линия, предлагаемое приближение – синяя точечная линия. Слева при $m = 1$; справа при $m = 2$

На рис. 2–4 приведены корни уравнения (15) при $m = 1, 2, 3$ для точных значений $f_m(k)$, приближенных по формуле (17), и приближенных по формуле (18). В расчетах принималось $h/R = 0,025$, $\rho_{fl}/\rho = 0,128$.

При использовании точных значений $f_m(k)$ и приближенных по (18) получаются близкие дисперсионные кривые, неразличимые в масштабах графиков. Сопоставление их с кривыми, полученными с помощью нулевого приближения, показывает, что частоты, на которых зарождаются распространяющиеся волны (появляются чисто мнимые осевые волновые числа k), успешно определяются в том и в другом случае, слегка меняется лишь форма ветвей дисперсионных кривых. Зато частоты отсечки затухающих волн (исчезновение полностью комплексных осевых волновых чисел) меняются существенно. Поэтому вряд ли следует пренебрегать упомянутыми выше уточнениями в компонентах матрицы, связанных с наличием жидкости. Для сравнения на всех рис. 2–4 приводятся дисперсионные кривые для оболочки без жидкости. Для компактности приводятся только положительные значения вещественных и мнимых частей, отрицательные просто имеют противоположный знак. Отметим, что распространяющиеся в направлении оси ox волнам соответствуют чисто мнимые волновые числа со знаком

«+», волнам, затухающим в направлении ox , – полностью комплексные волновые числа с отрицательной вещественной частью и положительной мнимой, а затухающим в направлении ox неволновым перемещениям соответствуют чисто вещественные отрицательные волновые числа. На рис. 2–4 красной линией обозначены k для оболочки с жидкостью при $f_m(k)$ по формуле (17), синей – для оболочки с жидкостью при $f_m(k)$ по формуле (18), зелёной – для оболочки без жидкости. Вещественные и мнимые части полностью комплексных k изображены сплошной линией, а чисто вещественные и чисто мнимые корни – пунктирной.

Рис. 2–4 приводят к следующим выводам для рассмотренного диапазона частот.

При $m = 1$ затухающие волны зарождаются при $\omega = 0$ и прекращаются при $\omega = 0,420.42; 0,74; 1,02$ соответственно для каждого случая (с жидкостью по (17), с жидкостью по (18), без жидкости). Первые две распространяющиеся волны зарождаются при $\omega = 0$ и $\omega = 0,61$, одинаковых для всех случаев, а третья – при $\omega = 1,09; 1,09; 1,4$ соответственно.

При $m = 2$ две затухающие волны зарождаются при $\omega = 0$, первая прекращается при $\omega = 0,011; 0,011; 0,019$, а вторая прекращается при $\omega = 0,59; 0,83; 1,10$ соответственно для каждого случая. Две распространяющиеся волны в рассмотренном диапазоне

частот зарождаются: первая при $\omega = 0,011$; $0,011$; $0,019$ соответственно для каждого

случая, а вторая при $\omega = 1,20$, одинаковых для всех рассмотренных случаев.

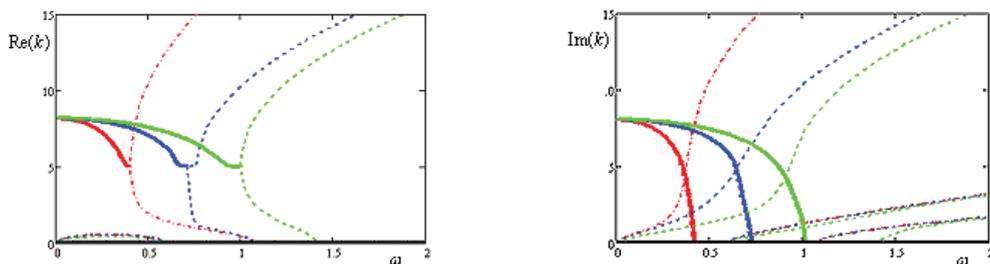


Рис. 2. Осевые волновые числа k при $m = 1$ (балочные колебания) в зависимости от частоты ω

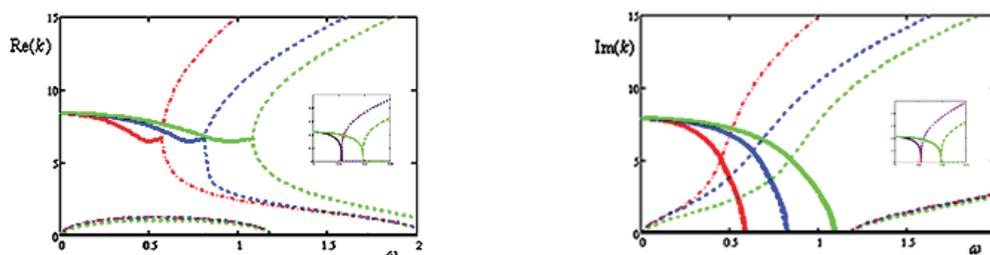


Рис. 3. Осевые волновые числа k при $m = 2$ (неосесимметричные колебания) в зависимости от частоты ω . На внутреннем рисунке те же кривые при малых ω до $0,03$

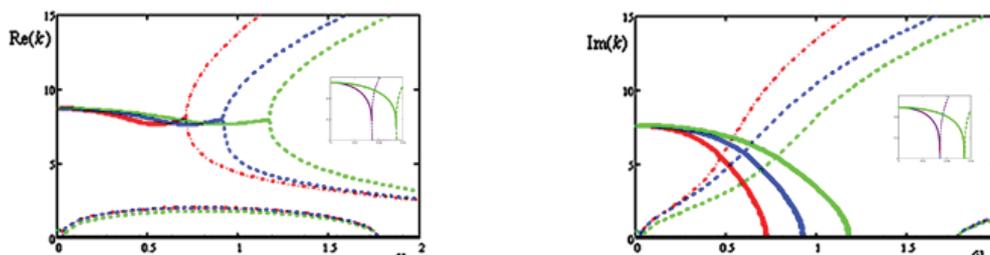


Рис. 4. Осевые волновые числа k при $m = 3$ (неосесимметричные колебания) в зависимости от частоты ω . На внутреннем рисунке те же кривые при малых ω до $0,06$

При $m = 3$ две затухающие волны зарождаются при $\omega = 0$ и прекращаются: первая при $\omega = 0,035$; $0,035$; $0,055$; вторая при $\omega = 0,73$; $0,93$; $1,18$ соответственно для каждого случая. Две распространяющиеся волны в рассмотренном диапазоне частот зарождаются: первая при $\omega = 0,034$; $0,034$; $0,054$ соответственно для каждого случая; вторая при $\omega = 1,79$, одинаковых для всех рассмотренных случаев.

Отметим, что в [5] аналогичная задача рассмотрена для ортотропной оболочки.

Список литературы

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. – М.: Наука. 1979. – 320 с.
2. Калинин В.С., Постнов В.А. Основы теории оболочек. – Л.: Изд-во ЛКИ, 1974. – 200 с.
3. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. Sorokin S.V. Fluid-Structure Interaction and Structural Acoustics. Book of Lecture Notes. – Technical University of Denmark, 1997. – 188 p.
5. Vijay Prakash S., Venkata R. Sonti Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate

frequency range. Journal of Sound and Vibration. Manuscript Draft. Manuscript Number: JSV-D-12-01440. – 15 с.

References

1. Volmir A.S. Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: Zadachi gidrouprugosti. M. Nauka. 1979. 320 p.
2. Kalinin V.S., Postnov V.A. Osnovy teorii obolochek. Izd-vo LKI., L. 1979. 200 p.
3. Spravochnik po spetsialnym funktsiyam pod red. Abramovitsa M. i Stigan I. M.: Nauka. 1979. 832 p.
4. Sorokin S. V. Fluid-Structure Interaction and Structural Acoustics. Book of Lecture Notes. Technical University of Denmark. 1997. 188 p.
5. Vijay Prakash S., Venkata R. Sonti Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range. Journal of Sound and Vibration. Manuscript Draft. Manuscript Number: JSV-D-12-01440. 15 p.

Рецензенты:

Фёдоров А.С., д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург;

Хазанов В.Б., д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург.

Работа поступила в редакцию 26.07.2013.