УДК 531.395

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШАРНИРНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Смирнов Д.А., Тежикова Н.П.

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, e-mail: dmsmir@yandex.ru

Разработана математическая модель динамики движения незамкнутой кинематической цепи двух шарнирно-соединенных стержней, обладающая двумя степенями свободы. В качестве основы для разработки математической модели служат уравнения Лагранжа второго рода. Полученная математическая модель использована для решения частной задачи при заданных начальных условиях. Решение системы дифференциальных уравнений осуществлено численным методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Определен закон движения системы в обобщенных координатах, представлены графики зависимостей углов поворота и угловых скоростей от времени. На основе анализа результатов расчета сделан вывод о наличии двух этапов в движении системы. На этапе установившегося движения стержни образуют практически прямую линию. При этом относительное движение второго стержня носит характер затухающих колебаний. Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей динамики движения незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы.

Ключевые слова: динамика механических систем, относительное движение, уравнения Лагранжа второго рода

STUDY ON KINETICS OF TWO-DEGREE-OF-FREEDOM HINGED ARMS MATERIAL SYSTEM

Smirnov D.A., Tezhikova N.P.

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, e-mail: dmsmir@yandex.ru

A mathematical model for kinetics of two-degree-of-freedom hinged arms material system is set up. Lagrange's equations of the second kind are taken as the basis for the mathematical model. The resulted mathematical model is used to solve a specific problem under given initial conditions. The simultaneous equations are solved by using Runge-Kutta method of the forth kind. The motion law for the system in generalized coordinates is defined. Diagrams for the arms rotary angle and rate versus time relationships are presented. The analysis of the calculation data shows the presence of two stages of the system motion. The arms form a practically direct line at the stable motion stage. Here the relative motion of the second arm is characterized by convergent oscillations. The results of the present research can be used to develop mathematical models for kinetics of open kinematic chains with finite number of degrees of freedom.

Keywords: kinetics of material systems, relative motion, Lagrange's equations of the second kind

Изучение динамики незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей для различных областей науки и техники, например, исследования динамики механических манипуляторов [5].

Целью данной работы является развитие методов исследования динамики незамкнутых кинематических цепей, а также разработка математической модели динамики механической системы шарнирно-соединенных стержней (рис. 1) с двумя степенями свободы. В работе решается частная задача по определению закона движения системы в обобщенных координатах.

Материалы и методы исследования

Рассматривается механическая система, состоящая из двух абсолютно твердых стержней, длины которых обозначим l_1, l_2. Стержни соединены между собой шарниром O_1. Стержень 1 закреплен при помощи неподвижного цилиндрического шарнира O. На стержень 1 действует момент активных сил M.

Задача решается при следующих предположениях:

– все шарниры являются идеальными (силы трения и их моменты отсутствуют);

– движение происходит в горизонтальной плоскости (силы тяжести не совершают работы);

– момент активных сил является постоянным M = const.

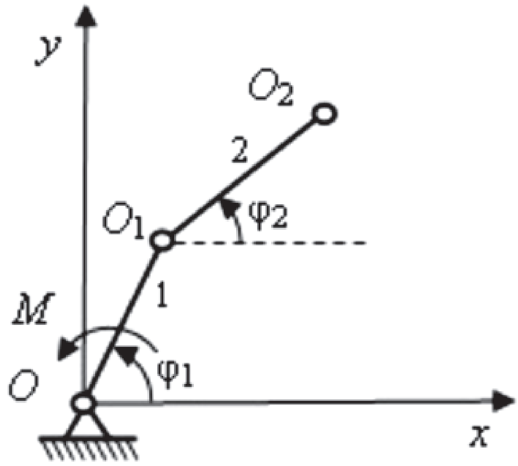


Рис. 1. Кинематическая схема: 1, 2 – абсолютно твердые стержни; O_1, O_2, – идеальные шарниры; φ_1, φ_2 – углы поворота стержней; M – момент активных сил

Для решения задачи об определении закона движения механической системы используется метод уравнений Лагранжа II рода [2, 4]. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выбраны углы поворота стержней φ_1, φ_2. Таким образом, уравнения Лагранжа II рода можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = Q_i, \qquad (1)$$

где φ_i – обобщенные координаты системы; $\dot{\phi}_i$ – обобщенные скорости; Q_i – обобщенные силы; T – кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий двух стержней по формуле

$$T = T_1 + T_2, \qquad (2)$$

где T_1 – кинетическая энергия стержня 1, T_2 – кинетическая энергия стержня 2.

Кинетическая энергия стержня 1 определяется по формуле [6]

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O^{(1)} \dot{\phi}_1^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2, \qquad (3)$$

где $I_O^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$ – момент инерции стержня 1 относительно точки O.

Кинетическую энергию стержня 2 определим по формуле [6]

$$T_2 = \sum \frac{m_k \overline{V}_k^2}{2}, \qquad (4)$$

где m_k – масса k-й точки стержня 2; $\overline{V}_k$ – вектор скорости k-й точки стержня 2.

Скорость $\overline{V}_k$ определяется теоремой сложения скоростей

$$\overline{V}_k = \overline{V}_{O_1} + \overline{V}_{kO_1}, \qquad (5)$$

где $\overline{V}_{O_1}$ – вектор скорости k-й точки стержня 2 от переносного движения (вектор скорости полюса – точки O_1); $\overline{V}_{kO_1}$ – вектор относительной скорости k-й точки стержня 2 от его вращения вокруг полюса O_1.

Подставляя (5) в выражение (4), получим

$$T_2 = \sum \frac{m_k^{(2)} \overline{V}_k^2}{2} = \sum \frac{m_k^{(2)}}{2}\left(\overline{V}_{O_1} + \overline{V}_{kO_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum m_k^{(2)}\left(V_{O_1}^2 + 2V_{O_1}V_{kO_1}\cos(\phi_2 - \phi_1) + V_{kO_1}^2\right), \qquad (6)$$

где $(\phi_2 - \phi_1)$ – угол между вектором скорости переносного движения $\overline{V}_{O_1}$ и вектором относительной скорости $\overline{V}_{kO_1}$.

Запишем выражения для переносной скорости V_{O_1} и относительной скорости V_{kO_1}

$$V_{O_1} = \dot{\phi}_1 l_1;\ V_{kO_1} = \dot{\phi}_2 r_k,$$

где r_k – радиус вектор k-й точки стержня 2 в относительном вращении вокруг полюса O_1.

Подставляя эти выражения в формулу (6) для кинетической энергии стержня 2, получим

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum m_k\left(\dot{\phi}_1^2 l_1^2 + 2\dot{\phi}_1 l_1 \dot{\phi}_2 r_k \cos(\phi_2 - \phi_1) + \dot{\phi}_2^2 r_k^2\right).$$

Раскрывая скобки, получим

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}_1^2 l_1^2 \sum m_k + 2\dot{\phi}_1 l_1 \dot{\phi}_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\sum m_k r_k + \dot{\phi}_2^2 \sum m_k r_k^2\right). \qquad (7)$$

Учитывая, что $\sum m_k = m_2$ – масса стержня 2, $\sum m_k r_k = \frac{1}{2} m_2 l_2$ – статический момент стержня 2 относительно точки O_1, $\sum m_k r_k^2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$ – момент инерции стержня 2 относительно точки O_1, окончательно для кинетической энергии стержня 2 получим

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\phi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2. \qquad (8)$$

Запишем выражение для кинетической энергии системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\phi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2;$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2. \qquad (9)$$

Определим производные от кинетической энергии системы, необходимые для составления левых частей уравнений Лагранжа.

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_1} = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 l_2^2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_2} = -\frac{1}{2} m_2 l_1^2 l_2^2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\phi}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1}\right) = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2 \ddot{\phi}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \left(\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_2 - \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_2^2 + \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2\right); \qquad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2}\right) = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \left(\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_1 + \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1^2 - \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right).$$

Правые части уравнений Лагранжа представляют собой обобщенные силы, определяемые выражением

$$Q_i = \sum \delta A_j \big/ \delta\phi_i ,$$

где $\sum \delta A_j$ – сумма работ активных сил, действующих на систему на ее возможном перемещении.

Учитывая, что на систему действует только момент активных сил M, получим

$$Q_1 = M;\ Q_2 = 0. \tag{14}$$

Подставляя выражения (10), (11), (12), (13) и (14) в уравнения Лагранжа (1), получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат ϕ_1 и ϕ_2

$$\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2 \ddot{\phi}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_2 -$$
$$-\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1^2 l_2^2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = M; \tag{15}$$

$$\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_1 +$$
$$+\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1^2 - m_2 l_1 l_2 \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = 0. \tag{16}$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2;\quad A_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2;$$

$$B = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2.$$

Уравнения (15) и (16) принимают вид

$$A_1\ddot{\phi}_1 + B\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_2 - B\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_2^2 + 2B\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = M; \tag{17}$$

$$A_2\ddot{\phi}_2 + B\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\ddot{\phi}_1 + B\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1^2 - 2B\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = 0. \tag{18}$$

Введя обозначения

$$a_1 = \frac{B}{A_1}\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right);\ a_2 = \frac{B}{A_2}\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right);$$

$$b_1 = \frac{B}{A_1}\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right);\ b_2 = \frac{B}{A_2}\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

и $m = \dfrac{M}{A_1}$ получим

$$\ddot{\phi}_1 + a_1\ddot{\phi}_2 - a_1\dot{\phi}_2^2 + 2a_1\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = m; \tag{19}$$

$$\ddot{\phi}_2 + a_2\ddot{\phi}_1 + a_2\dot{\phi}_1^2 - 2a_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = 0. \tag{20}$$

Выразим вторые производные по времени $\ddot{\phi}_1$ и $\ddot{\phi}_2$

$$\ddot{\phi}_1 = m - a_1\frac{ma_2 + a_2\dot{\phi}_1^2 + a_1a_2\dot{\phi}_2^2 - 2a_2\left(a_1+1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2}{\left(a_1a_2 - 1\right)} + a_1\dot{\phi}_2^2 - 2a_1\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2;$$

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{ma_2 + a_2\dot{\phi}_1^2 + a_1a_2\dot{\phi}_2^2 - 2a_2\left(a_1+1\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2}{\left(a_1a_2 - 1\right)}.$$

Решение этой системы уравнений может быть осуществлено различными численными методами [1, 3].

Результаты исследований и их обсуждение

Рассмотрим результаты решения, полученные при реализации метода Рунге–Кутта четвертого порядка. На рис. 2 представлены зависимости углов поворота стержней φ_1 и φ_2 от времени t, а на рис. 3 показаны зависимости угловых скоростей $\omega_1 = \dot{\phi}_1$ и $\omega_2 = \dot{\phi}_2$ от времени. Представленные зависимости получены при следующих исходных данных и начальных условиях:

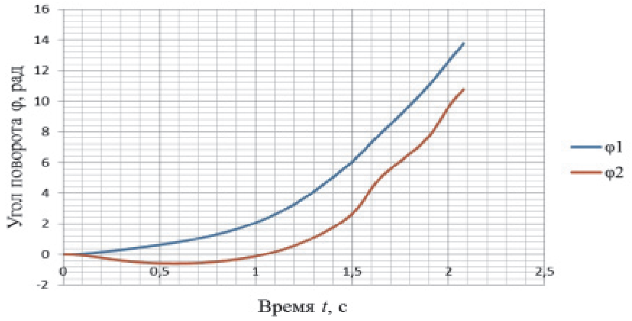
$$m_1 = m_2 = 1\ (\text{кг}),\ l_1 = l_2 = 1\ (\text{м}),$$

$$M = 5\ (\text{Н·м}),\quad t = 0,$$

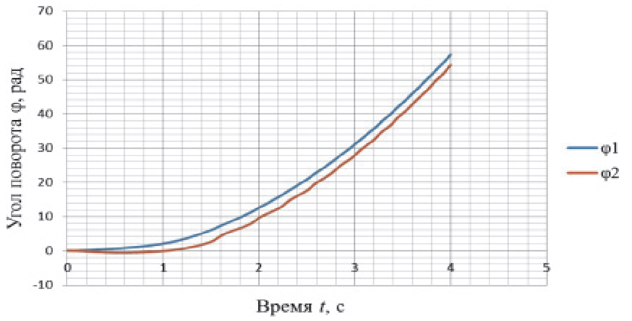
$$\phi_1\big|_{t=0} = 0,\quad \phi_2\big|_{t=0} = 0,$$

$$\dot{\phi}_1\big|_{t=0} = 0,\quad \dot{\phi}_2\big|_{t=0} = 0.$$

Анализ результатов решения показывает, что движение системы можно разделить на два этапа. Первый этап неустановившегося движения, когда стержни 1 и 2 вращаются в противоположных направлениях (рис. 2*а* и 3*а*). Через небольшой промежуток времени после начала движения начинается второй этап, на котором стержни 1 и 2 начинают вращаться в одном направлении (рис. 3*б*), причем стержень 2 как бы догоняет стержень 1. Можно говорить о начале установившегося движения. Стержни при этом располагаются практически в прямую линию.

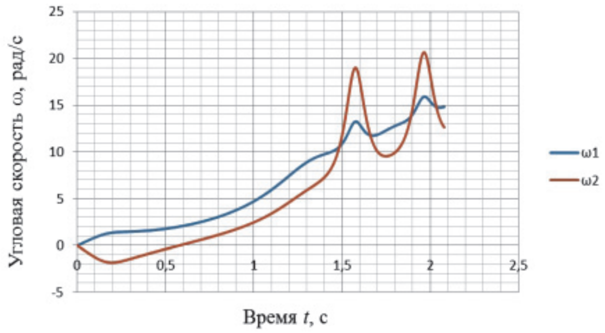


а

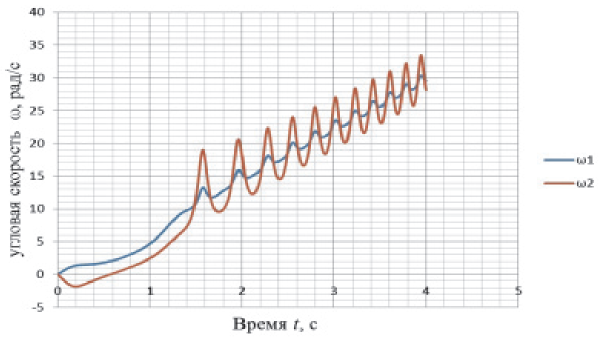


б

Рис. 2. Зависимость углов поворота стержней от времени:
а – зависимость углов поворота стержней от времени на этапе неустановившегося движения;
б – зависимость углов поворота стержней от времени на этапе установившегося движения



а



б

Рис. 3. Зависимость угловых скоростей от времени:
а – зависимость угловых скоростей от времени на этапе неустановившегося движения;
б – зависимость угловых скоростей от времени на этапе установившегося движения

Заключение

Анализ графиков угловых скоростей показывает, что движение стержня 2 обладает признаками периодичности. Угловая скорость стержня 2 периодически меняется относительно угловой скорости стержня 1 (рис. 3). Рассматривая движение стержня 2 как сложное, состоящее из переносного движения стержня 1 и относительного движения стержня 2 по отношению к вращающейся точке O_1, сделаем вывод, что относительное движение стержня 2 можно рассматривать как затухающее колебание.

Результаты решения, полученные при других исходных данных и начальных условиях, позволяют сделать следующие выводы:

– длительность неустановившегося движения зависит от момента активных сил M, при увеличении момента активных сил время неустановившегося движения уменьшается;

– минимальное значение угла поворота второго стержня φ_2 не зависит от величины момента активных сил, а зависит только от начальных условий.

Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей динамики незамкнутых кинематических цепей.

Список литературы

1. Бахвалов С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.

2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

4. Панов Ю.Л., Панов А.Ю. Относительное движение в механике. Инженерные задачи. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2008. – 144 с.

5. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. – М.: КноРус, 2011. – 608 с.

References

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov GM. Numerical Methods. Moscow, BINOM. Laboratoriya Znaniy, 2006. 636 p.

2. Lure A.I. Analytical Mechanics. Moscow, GIFML, 1961. 824 p.

3. Marchuk G.I. Methods of Computing Mathematics. Moscow, Nauka, 1989. 608 p.

4. Panov Yu.L., Panov A.Yu. Relative Motion in Mechanics. Engineering Tasks. NGTU n. a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, 2008. 144 p.

5. Popov E.P., Vereschagin A.F., Zenkevich S.L. Manipulator Robots: Dynamics and Algorithms. Moscow, Nauka, 1978. 400 p.

6. Yablonskiy A.A., Nikiforova V.M. A Course in the Theory of Mechanics. Moscow, KnoRus, 2011. 608 p.

Рецензенты:

Панов А.Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет», г. Нижний Новгород;

Иванов А.А., д.т.н., профессор кафедры «Автоматизации машиностроения», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет», г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 05.12.2013.