УДК 66.021

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ДИСПЕРСНЫХ ПОТОКОВ

Лебедев А.Е., Зайцев А.И.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный технический университет», Ярославль, e-mail: xe666@mail.ru

На основе вероятностного подхода разработано математическое описание процессов образования расширяющихся дисперсных потоков частиц различной природы. В качестве параметра распределения выбрана угловая координата – угол рассеивания. Составлены выражения для стохастической энергии для случаев образования потоков твердых частиц, капель жидкости и комплексных частиц – содержащих жидкостную оболочку. Получены выражения для дифференциальных функций распределения числа частиц по углам рассеивания, позволяющие оценить структуру и форму образованного потока. Предложены методы определения неизвестных параметров распределения – из условий нормировки и энергетического баланса для момента образования потока. На основе полученного выражения дифференциальной функции распределения числа частиц по углу рассеивания составлены зависимости для определения статистических средних процесса. Предложена методика оценки максимального значения угла раскрытия потока при формировании потоков с использованием центробежных устройств.

Ключевые слова: дисперсный поток, частица, угол рассеивания, распыление, энергия, диаметр, функция распределения

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE FORMATION OF A DISPERSED FLOWS

Lebedev A.E., Zaytsev A.I.

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: xe666@mail.ru

On the base of stochastic approach the mathematical description of the different particles disperse flows forming processes is designed. Dispersion angle is an angle coordinate which is chosen as distribution parameter. Formulas for stochastic energy for the cases of forming the flows of solid particles, drops of liquid and complex particles which consist of liquid capsule are compiled. Formulas for differential distribution functions of particles numbers by dispersion angle which help to estimate the structure and form of receiving flow are achieved. Methods suitable to define unknown distribution parameters – from the terms of standardization and energy balance for the moment of flow forming – are offered. On the base of differential distribution function of particles numbers by dispersion angle, the dependencies for receiving the static medium datum of that process are compiled. The method to estimate maximal flow angle during flow forming with the help of centrifugal mechanisms are offered.

Keywords: dispersed flow, particle scattering angle, sputtering, the energy, the diameter of the distribution function

Образование разреженных потоков является одним из основных процессов при переработке дисперсных материалов [1–5]. В разреженном состоянии осуществляются такие процессы, как смешение, измельчение, ударное разделение суспензий [5] и т.д. Несмотря на такое широкое применение распылительных устройств, практически отсутствуют методики расчета.

Анализ математических моделей, посвященных движению частиц в дисперсных системах (глава 1), показывает наличие двух подходов – одночастичных задач для малоконцентрированных потоков и статистического описания с учетом взаимодействия частиц как с несущей фазой, так и между собой.

Наличие случайных факторов в процессе формирования разреженного потока, таких как неупорядоченность движения частиц, неравномерность распределения их объемной плотности, взаимные и вторичные их столкновения и т.д., требуют вероятностного подхода к решению задачи [1]. При этом основной целью является установление явного вида функции распределения [1] частиц твердой фазы по их диаметрам для энергетически замкнутой макросистемы решением соответствующего кинетического уравнения [1].

Статистическое описание макрофизических систем в их равновесном состоянии, когда выполняется условие энергетической замкнутости, практически эквивалентно описанию стохастического поведения соответствующих им динамических систем [2]. При этом возможен переход от динамических уравнений с учетом ланжевеновских источников к кинематическим уравнениям типа *Фоккера-Планка* [1] со стационарными решениями в виде функции распределения по набору обобщенных координат макросистемы.

В соответствии со статистическим подходом [1] будем считать, что макрофизические системы разреженных потоков представляют собой равновесные системы не взаимодействующих между собой частиц. Энергия данной системы сохраняется и определяется энергией струи и энергией взаимодействия сформированных частиц с окружающей средой.

Статистическое описание образования разреженного потока частиц выполняется в следующем порядке. Первоначально постулируется распределение числа частиц в элементе фазового пространства, которое определяется совокупностью обобщенных координат макросистемы q_v, т.е. наборам переменных, характеризующих механизм образования разреженного потока. Затем составляется уравнение энергетического баланса в системе «струя-поток», задается условие нормировки для определения неизвестных параметров искомого распределения, выводится выражение для дифференциальной функции распределения числа частиц по обобщенной координате и вычисляются статистические средние как некоторые характеристики поведения дисперсной системы.

В случае образования дисперсной системы потока частиц фазовое пространство определяется совокупностью случайной скорости центра масс частицы dv_1 и ее диаметра D_1.

Согласно работам [1, 2], для гамильтоновых закрытых систем значение энергии можно считать заданным, и вид канонической функции распределения совпадает с видом равновесной функции, соответствующей принципу максимума энтропии для закрытых макросистем, распределение числа частиц дисперсного потока dN_1 в элементе фазового объема $d\Gamma_1 = dv_1 dD_1$ экспоненциально убывает в зависимости от стохастической энергии [1, 2] частицы E_1:

$$dN_1 = A_1 \exp\left(-E_1 \cdot E_{01}^{-1}\right) d\Gamma_1. \quad (1)$$

Здесь E_{01} – параметр, соответствующий мере энергии частиц, A_1 – нормировочный коэффициент.

В общем случае стохастическая энергия частицы состоит из кинетической энергии, энергии взаимодействия с окружающей средой, энергии внутреннего движения, поверхностной энергии и энергии гидродинамического взаимодействия:

$$E = E_k + E_{vz} + E_{vn} + E_{pov} + E_{gidr}. \quad (2)$$

Здесь

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2};\quad E_{vz} = \frac{mv_y^2}{2}; \quad (3)$$

$$E_{vn} = E_{pov} = \pi D^2 \sigma;\quad E_{gidr} = C \cdot H \cdot v,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения [3]; φ_1 – угол рассеивания, D_1 – диаметр частицы, v_1 – скорость частицы, H – толщина жидкостного слоя, C – коэффициент гидродинамического сопротивления [2], v – скорость частицы.

Рассмотрим частные случаи образования потоков.

В случае формирования расширяющегося потока твердых частиц в стохастическую энергию входят только первые две составляющих – кинетическая и энергия поперечного движения частиц в потоке (вызванного его расширением) [2, 4]:

$$E = E_k + E_{vz}. \quad (4)$$

При распаде одиночных жидких струй на капли стохастическая энергия состоит из кинетической, поверхностной и энергии внутреннего движения [1]:

$$E = E_k + E_{pov} + E_{vn}. \quad (5)$$

В процессе формирования расширяющейся дисперсных потоков капель также необходимо учесть энергию, затрачиваемую на ее расширение E_{vz} [2, 6]:

$$E = E_k + E_{vz} + E_{vn} + E_{pov}. \quad (6)$$

В выражение для стохастической энергии при формировании потока неоднородных сред, например потока частиц суспензии [7] будут входить все слагаемые.

Следующим этапом моделирования является определение неизвестных констант A_1 и E_{01}, входящих в выражение (1).

Свободный параметр распределения A_1 определим из нормировочного соотношения [1], которое отвечает балансу массы в системе «нераспавшаяся струя сформированный поток»:

$$N_1 = \int_{\Gamma_1} dN_1. \quad (7)$$

Здесь N_1 – полное число частиц, находящихся в потоке в единицу времени.

С учетом (1) выражение (7) примет вид:

$$A_1 = N_1 \int_{v_{1\min}}^{v_{1\max}} \int_{D_{1\min}}^{D_{1\max}} \int_{\varphi_{1\min}}^{\varphi_{1\max}} \exp\left(-E_1 \cdot E_{01}^{-1}\right) d\varphi_1 dD_1 dv_1. \quad (8)$$

Неизвестный параметр E_{01} в выражении (1), соответствующий мере энергии системы потока частиц [1, 8], находится из уравнения энергетического баланса, составленного для момента формирования разреженного потока:

$$E_n = E_p, \quad (9)$$

где E_n – энергия нераспавшейся струи (потока), E_p – энергия образованного разреженного потока частиц. Согласно выбранному распределению числа частиц в элементе фазового объема $d\Gamma_1$, можно получить дифференциальные функции распределения числа капель жидкости по углу рассеивания φ_1 в фазовом объеме :

$$d\Gamma_1' = dv_1 dD_1. \quad (10)$$

Дифференциальная функция распределения элементов потока по углам рассеивания φ_1 задается выражением :

$$f_1(\varphi_1) = \frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{d\varphi_1} = \frac{1}{N_1}\int_{\Gamma_1^l} dN_1 =$$
$$= \frac{1}{N_1}\int_{D_{1\min}}^{D_{1\max}}\int_{v_{1\min}}^{v_{1\max}} A_1 \exp\left(\frac{-E_1(\varphi_1, D_1, v_1)}{E_{01}}\right) dv_1 dD_1. \quad (11)$$

Основные средние характеристики процесса распыления, такие как наиболее вероятный угол рассеивания и размер частиц [1], можно определить из следующих выражений:

$$\varphi_1^{\text{ср}} = \frac{1}{N_1}\int_{\Gamma} \varphi_1 dN_1;$$
$$D_1^{\text{ср}} = \frac{1}{N_1}\int_{\Gamma} D_1 dN_1. \quad (12)$$

Выбор в качестве одной из координат угла рассеивания объясняется тем, что большинство известных диспергирующих устройств создают расширяющиеся потоки, имеющие в поперечном сечении расширяющуюся треугольную (коническую форму).

Таким образом, стохастический подход позволяет получить дифференциальные функции распределения числа частиц по углам рассеивания, а также вычислить средние характеристики процесса образования дисперсных потоков частиц.

Определение максимальной величины угла раскрытия факела

Одним из основных параметров процесса образования дисперсных потоков является угол раскрытия. Величина угла раскрытия факела необходима при расчете параметров распределения A_1 и E_{01} (выражения (8), (12)). Для определения $\varphi_{1\max}$ была разработана приближенная методика оценки данной величины.

Рассмотрим процесс истечения струи из канала. Согласно многочисленным исследованиям, как теоретическим [1], так и экспериментальным [2], расширение потока происходит в результате обтекания краев канала и взаимодействия с окружающей средой.

Для определения максимального значения угла раскрытия факела составим уравнение энергетического баланса для периферийной части потока, которая подвержена максимальному отклонению от оси потока:

$$\frac{mv_{px}^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + M_c\varphi_{1\max}. \quad (13)$$

Здесь M_c – момент аэродинамических сил; v_{px} – скорость частиц в конечной части распылителя, определяемая по изложенной в работе [2] методике. Величина момента M_c может быть найдена из выражения

$$M_c = \frac{K_c \pi \left(D_1^{\text{ср}}\right)^2 v_{px} R_0}{4}, \quad (14)$$

где R_0 – расстояние от центра распылительного канала до края; K_c – коэффициент лобового сопротивления. Тогда

$$\frac{\pi\rho\left(D_1^{\text{ср}}\right)^3 v_{px}^2}{12} = \frac{\pi\rho\xi^2\left(D_1^{\text{ср}}\right)^3 v_{px}^2}{12}\left(1 + \text{tg}^2\varphi_{1\max}\right) + M_c\varphi_{1\max}. \quad (15)$$

Здесь ξ – коэффициент местного сопротивления [1], учитывающий тип распылителя.

Решая (15) относительно $\varphi_{1\max}$, имеем:

$$\varphi_{1\max} = rootof\left(12ZM_c - \alpha + \alpha\xi^2 + \alpha\xi^2\text{tg}^2 Z\right), \quad (16)$$

где

$$\alpha = \pi\left(D_1^{\text{ср}}\right)^3 v_{px}^2; \quad (17)$$

rootof(õ) – форма представления решения уравнения (16) [9].

Полученные зависимости (16)–(17) могут быть использованы для оценки значения $\varphi_{1\max}$ для потоков, создаваемых канальными устройствами. Величина коэффициента местного сопротивления ξ определяется опытным путем и зависит от типа распылителя.

Список литературы

1. Зайцев А.И. Ударные процессы в дисперсно-пленочных системах / А.И. Зайцев, Д.О. Бытев. – М.: Химия, 1994. – 176 с.

2. Лебедев А.Е. Дисперсные потоки твердых частиц в ударно-струйных измельчителях материалов. Теория и расчет – Ярославль: Изд. ЯГТУ, 2012. – 83 с.

3. Пажи Д. Г. Распылители жидкости. – М.: Химия, 1979. – 216 с.

4. Пат. РФ№ 2212566, 20.09.2003.

5. Суханов А. С математическое описание движения частиц в разреженном потоке центробежного измельчителя ударного действия // Фундаментальные исследования. –М., 2012. – № 3. – С. 133–137.

6. Лебедев А.Е. Математическая модель процесса распыла вязких жидкостей // Вестник СГТУ. – Саратов, 2011. – Т. 62, вып.4. – С. 34–37.

7. Капранова А.Б. Стохастическое описание движения осветленной фракции суспензии // Изв. ВУЗов. Химия и химическая технология. – Иваново, 2004, − Т. 47, вып. 6.− С. 99–101.

8. Капранова А.Б. Математическая модель механики движения сыпучих материалов в разреженных потоках аппаратов с эластичными рабочими элементами // Изв. ВУЗов. Химия и химическая технология. – Иваново, 2009. – Т. 52, вып. 5. – С. 111–113.

9. Дьяконов В.П. Maple 6 -СПб.: Питер, 2001.-608с.: ил.

References

1. Zaytsev A.I., Bytev D.O. Udarnye protsessy v dispersnoplenochnyh sistemah Moscow, 1994. 176 p.

2. Lebedev A.E., Zaytsev A.I. Dispersnye potoki tverdykh chastits v udarno-struynykh izmelchitelyakh Yaroslavl., 2012. 83 p.

3. Pazhi D.G., Galustov V.S. Raspyliteli zhidkosti Moscow, 1979. 216 p.

4. Pat. RU№ 2212566, 20.09. 2003.

5. Sukhanov A.S., Lebedev A.E., Zaytsev A.I., Lupanov A.P., Fundamentalnye issledovaniya Moscow, 2012 no. 3, pp. 133–137.

6. Lebedev A.E., Zaytsev A.I. Kapranova A.B., Petrov A.A. Vestnik SGTU Saratov, 2011 v 62, pp. 34–37.

7. Kapranova A.B., Lebedev A.E., Bytev D.O., Zaytsev A.I. Izvestiya vuzov khimiyz I khimicheskaya tekhnologiya, v47, no. 6 pp. 99–101.

8. Kapranova A.B., Lebedev A.E., Zaytsev A.I., Kuzmin I.O. Izvestiya vuzov khimiya I khimicheskaya tekhnologiya, v52, no. 5 pp. 111–113.

9. Dyakonov V.P. Maple. SPB, 2001, 608 p.

Рецензенты:

Мурашов А.А., д.т.н., заведующий кафедрой математических и естественно-научных дисциплин Московского финансово-юридического университета, г. Ярославль;

Епархин О.М., д.т.н., профессор, директор Ярославского филиала ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения, г. Ярославль.

Работа поступила в редакцию 05.12.2013.