

УДК 004.942

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ СГЛАЖИВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ

¹Хаймович И.Н., ²Клентак Л.С.

¹НОУ ВПО «Международный институт рынка», Самара, e-mail: kovalek68@mail.ru;

²ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)», Самара, e-mail: kovalek68@mail.ru

Проведен анализ существующих методов сглаживания сложных поверхностей с использованием интерполяционных сглаживающих сплайнов, их отличает медленная сходимость при сглаживании поверхностей, заданных большим объемом исходных данных, выявлен критерий сходимости данного вида математических функций, выделена область их применения в технике, в частности, при автоматизации проектирования сложных объектов заготовительно-штамповочного производства, что определяет актуальность их применения в современных условиях. Авторами разработан новый метод сглаживания данного вида поверхностей, обладающий лучшей сходимостью и лучшим значением результирующего функционала. Метод имеет графическую основу. По разработанным программам были проведены исследования разных методик сглаживания, результаты трансформации сходимости и достоверности методик были систематизированы в итоговую таблицу. Показаны результаты сглаживания поверхностей в САПР ковок компрессорных лопаток авиационных двигателей. Данные алгоритмы и расчетные программы могут применяться и при сглаживании поверхностей сложной геометрической формы, заданных произвольным количеством сечений.

Ключевые слова: кубические интерполяционные сплайны, сглаживающий сплайн, функционал сходимости, крайние условия сплайна, метод исключения

IMPROVEMENT OF COMPLEX METHOD OF SMOOTHING SURFACES USING INTERPOLATION SPLINE

¹Khaimivich I.N., ²Klentak L.S.

¹NOU VPO «International Market Institute», Samara, e-mail: kovalek68@mail.ru;

²VPO «Samara State Aerospace University (National Research University)»,
Samara, e-mail: kovalek68@mail.ru

The analysis of existing methods of smoothing complex surfaces using a smoothing spline interpolation, they are distinguished by slow convergence when smoothing the surfaces given a large amount of raw data revealed a convergence criterion of this type of mathematical functions, select an area of their application in technology, particularly in the automation of the design of complex objects zagotovitelno – stamping production that determines the relevance of their application in the modern world. The authors have developed a new method for smoothing the surfaces of this type, which has a better convergence of the best value and the resulting functional. The method is based graphics. According developed programs were studied various smoothing techniques, the results of the transformation of convergence and accuracy of methods have been codified in the summary table. The results of smoothing the surfaces in CAD forged compressor blades of aircraft engines. These algorithms and computer codes can be used for smoothing surfaces and complex geometric shapes defined by any number of sections.

Keywords: cubic spline interpolation, smoothing spline, the functional convergence spline boundary conditions, the method of elimination

Рассмотрим основные особенности и приемы сглаживания данных с помощью одномерных сплайнов, оказавшихся эффективными при расчетах сложных геометрических поверхностей. Разработанные авторами методы сглаживания являются актуальными в САПР сложных объектов заготовительно-штамповочного производства [1, 2, 5].

Пусть на сетке $\Delta: a = x_1 < \dots < x_N = b$ по заданным значениям $y_i^0, i = 1, \dots, N$ построен кубический интерполяционный сплайн S степени $n = 2$. Известно, что этот сплайн определяется однозначно $N - 2 + 2n$ независимыми параметрами, из которых n пара-

метров связаны условиями единственности сплайна. Поэтому функционал

$$J(S) = 1/2 \int_a^b |S^{(n)}|^2 dx, \quad (1)$$

где $S^{(n)}$ – n -я производная сплайна S , является положительной квадратичной функцией $N - 2$ независимых переменных. Варьируя в допустимых пределах $N - 2$ независимых параметра, можно уменьшить величину этого функционала и получить в таком смысле более гладкий сплайн, чем исходный.

Для построения такого сплайна, кроме узловых значений функции, необходимы еще два значения ее производных. Если использовать значения вторых производных

на концах сетки Δ , то эти условия будут следующими:

$$\begin{aligned} S_1'' &= \alpha S_2'' , \\ S_N'' &= \beta S_{N-1}'', \\ \alpha, \beta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Дополнительные параметры α, β чаще всего принимаются равными единице. В таком случае на последних отрезках сетки Δ получается «чистый изгиб».

При проектировании профиля пера покровки будем использовать кубические сплайны, обеспечивающие необходимую для оболочек Кирхгофа–Лява непрерывность второй производной, то есть кривизны.

Вернемся к сглаживающим сплайнам. Пусть M – множество сплайнов S , проходящих в «коридоре»:

$$|y_i - y_i^0| \leq \varepsilon_i, \quad i = 2, \dots, N - 1, \quad (2)$$

где ε_i – допустимые отклонения исходных данных в $N - 2$ узлах сетки Δ . Тогда сплайн $S^* \in M$, удовлетворяющий условию

$$J(S^*) = \min J(S), \quad S \in M, \quad (3)$$

где $J(S)$ определяется по (1), является сглаживающим.

Рассмотрим теперь вариацию функционала $J(S)$ по $N - 2$ независимым узловым перемещениям, для которых образован коридор (2). Вариация функционала имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta J &= \sum_{i=2}^{N-2} q_i \delta y_i q_i = (-1)^n r_i; \\ \delta y_i &= y_i - y_i^0; \\ r_i &= S_{i+}''' - S_{i-}''' , \end{aligned} \quad (4)$$

где r_i – разрыв старшей производной сплайна в узле i сетки.

Очевидно, функционал $J(S)$ будет уменьшаться, если будут выполняться условия

$$q_i \delta y_i \leq 0, \quad i = 2, \dots, N - 1, \quad (5)$$

позволяющие определить необходимый знак приращения δy_i по знаку реакции q_i . Так, если $q_i > 0$, то $\delta y_i < 0$ и наоборот. В случае $q_i = 0$ нет разрыва старшей производной сплайна, что эквивалентно отсутствию узла i сетки. Отсюда следует, что самый гладкий сплайн не имеет разрывов старшей производной на отрезке (a, ϑ) .

Далее, если сглаживающий сплайн в точном узле i принимает верхнее предельное положение $y_i^0 + \varepsilon_i$, то $q_i \leq 0$, и наоборот. Если такой сплайн занимает промежуточ-

ное положение в коридоре, то это, очевидно, эквивалентно отсутствию узла, то есть в этом узле $q_i = 0$.

Данные положения подложены в основу алгоритма построения сглаживающих сплайнов. Действительно, так как в узле i сетки сглаживающий сплайн может принимать всего три положения, то множество M содержит 3^{N-2} элемента. Поскольку сглаживающий сплайн существует, то простым перебором элементов множества его можно найти. Понятно, однако, что такой алгоритм не рационален. Поэтому рассмотрим другие алгоритмы, которые в отличие от некоторых известных алгоритмов [3] обеспечивают сходимость и при этом выполняются условия (2). Существует алгоритм перебора узловых точек сплайна для сглаживания, предложенный С.Л. Березницким [4].

Пусть границы коридора (2) раздвигаются от нуля до предельных значений одновременно при изменении некоторого параметра t от нуля до единицы. В начальный момент строится исходный сплайн S и определяются величины q_i во всех узлах $i = 2, \dots, N - 1$. Далее, если $q_i > 0$, то узел i «прикрепляется» к нижней подвижной границе, если $q_i < 0$ – к верхней. В случае $q_i = 0$ узел «освобождается».

В закрепленных узлах принимается, что

$$y_i = y_i^0 - t \varepsilon \operatorname{sgn} q_i. \quad (6)$$

При данном наборе закрепленных узлов коэффициенты q_i и y_i линейно зависят от t .

На втором шаге назначается $t = t_1 < 1$ и строится соответствующий сплайн. По значениям $q_i, i = 2, \dots, N - 1$ на основе указанной линейности определяются параметры $t_{(i)}, i = 2, \dots, N - 1$, при которых:

1) в закрепленном узле величина q_i сменяет знак;

2) свободный узел i пересечет предельную границу «коридора».

Затем выбирается $t^* = \min t_{(i)}$ и строится новый сплайн по значению параметра $t_2 = t^*$. В полученном сплайне узлы с $q_i = 0$ отпускаются, а узлы, пересекающие предельную границу, прикрепляются к ней.

Далее все повторяется. Если окажется, что наименьшее значение $t^* > 1$, то принимается $t^* = 1$, границы принимают предельное положение, а соответствующий сплайн является сглаживающим. Если все $q_i = 0, i = 2, \dots, N - 1$, то процесс также прекращается.

Этот алгоритм является трудоемким при пересчете, поэтому можно ввести упрощения, разработанные авторами.

На первой итерации по заданным значениям $y^{(i)} = y_i^0, i = 2, \dots, N - 1$ строится

исходный сплайн и вычисляются коэффициенты q_i . На второй и последующих итера-

циях узловые значения сплайна вычисляются по формуле

$$y_i^{(k)} = y_i^{(k-1)} - \frac{\varepsilon_i}{m} \frac{q_i^{(k-1)}}{\max_j |q_j^{(k-1)}|}, \quad i, j = 2, \dots, N-1, \quad (7)$$

где m – назначаемое целое число, определяющее погрешность построения сглаживающего сплайна. Далее строится соответствующий сплайн.

На каждой итерации контролируется условие:

$$|y_i^{(k)} - y_i^0| \leq \varepsilon_i, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

И если оно нарушается в узле I , то в нем принимается соответствующее предельное значение. Поскольку здесь узлы с нулевой реакцией q_i не «отпускаются», то приходится проверять основное условие: $\delta J \leq 0$. Если оно нарушается, то шаг итерации дробится, т.е. вместо числа m принимается $2m$, и вновь строится сплайн. В результате получаем сглаживающий интерполяционный сплайн. Результаты использования этого 1 алгоритма показаны в таблице.

Существует еще один алгоритм [3] построения интерполяционных сглаживающих сплайнов. В нем речь идет о минимизации функционала вида:

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (f_i - y_i^0)^2, \quad (9)$$

где y_i^0 – ординаты исходных данных, $\rho_i > 0$ – заданный весовой коэффициент.

Заметим, что если все $\rho_i = 0$, то $y_i = y_i^0$, $i = 0, \dots, N$ и сглаживающий сплайн превращается в интерполяционный. Отсюда следует, что чем точнее заданы y_i^0 в узлах сетки, тем меньше должны быть весовые множители ρ_i . В частности, если возникнет необходимость закрепить точку с номером 1, то надо принять $\rho_1 = 0$.

Сглаживающий сплайн $S(x)$ должен удовлетворять условиям:

$$\varepsilon_i = |y_i - y_i^0| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N \quad (10)$$

или

$$\rho_i |D_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (11)$$

где δ_i – допустимый «коридор» заданных значений y_i^0 , который на практике задается технологом и обычно берется равным 20% допуска на припуск по эквидистанте пера.

Строится итерационный процесс, реализация которого позволяет получить множители ρ_i , $i = 0, \dots, N$

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} \theta \delta_i / |D_i^{(k)}| \geq \vartheta; \\ 0, |D_i^{(k)}| < \vartheta, \end{cases} \quad (12)$$

где k – номер итерации. Коэффициенты D рассчитываем матричным способом [4].

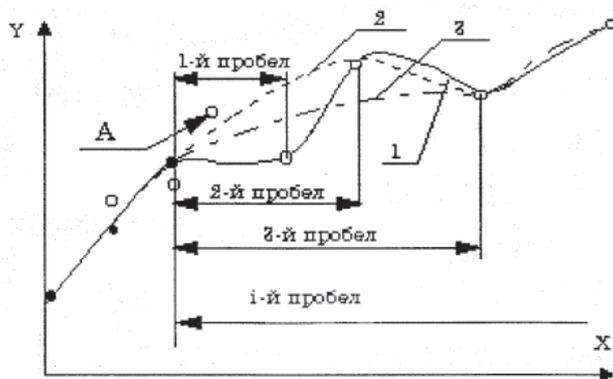
Следующим шагом находится y_i :

$$y_i = y_i^0 - \rho_i D_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения сплайна в узлах сетки не окажутся в допустимом «коридоре».

Однако в работе [3] не приводится четких рекомендаций по выбору коэффициентов θ и ϑ , что затрудняет практическое применение этого алгоритма. Результаты работы второго алгоритма находятся в таблице.

Можно использовать алгоритм сглаживания интерполяционными кубическими сплайнами с описанием массива узловых точек, предлагаемый авторами. По этому алгоритму последовательно корректируется положение каждой точки массива, кроме одной из осей. На рисунке показана графическая модель сплайна.



Графическая модель сплайна

Пусть сначала корректируется положение точки А. На первом этапе эта точка исключается из общего массива, в результате чего образуется 1-й пробел. Интерполяционный сплайн 1, построенный по оставшимся узловым точкам, показывает величину ее коррекции. На следующих этапах пробел увеличивается за счет включения в него нарастающего числа точек. Возникающие при этом новые сплайны

(2, 3 ... i) позволяют рассчитать поэтапную коррекцию. Значение этой величины принимается равным среднеарифметическому ее поэтапных величин. Выбор длины максимального пробела зависит от кривизны профиля и шага базовых точек. Математическая модель интерполяционного сплайна берется из теории сплайн – функций [3].

Кубический сплайн имеет вид:

$$s(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (14)$$

на каждом подынтервале

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Эти коэффициенты выражаются формулами:

$$b_i = \frac{y_{i+1} + y_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i);$$

$$c_i = 3\sigma_i, \quad d_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i};$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

σ_i находится из системы:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & h_1 & & & & \\ & \alpha_2 & h_2 & 0 & & \\ & & \alpha_3 & h_3 & & \\ & & & \dots & & \\ & 0 & & & \dots & \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь диагональные элементы α_i вычисляются по формулам:

$$\alpha_1 = -h_1;$$

$$\alpha_i = 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}^2}{\alpha_{i-1}};$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1;$$

$$\alpha_n = -h_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}},$$

а правые части β_i – по формулам

$$\beta_1 = h_1^2 \Delta_1^{(3)};$$

$$\beta_i = (\Delta_i - \Delta_{i-1}) - \frac{h_{i-1} \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}};$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1;$$

$$\beta_n = -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3}^{(3)} - h_{n-1} \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

Наконец, коэффициенты σ_i определяются посредством обратной подстановки:

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n};$$

$$\sigma_i = \frac{\beta_i - h_i \sigma_{i+1}}{\alpha_i};$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 1.$$

Эту систему из n уравнений можно решить методом исключения. Для вычисления неизвестных σ_i можно использовать написанные программы. С помощью другой программы можно вычислять значения сплайна.

На каждом шаге итерации оставшиеся точки аппроксимируются кубическим сплайном, что позволяет рассчитывать n новых скорректированных значений рассматриваемой точки $y_{ki,1}; y_{ki,2}; \dots; y_{ki,n}$. Отклонения новых значений координат точки от исходных определяются из отношений:

$$\Delta y_{ki,1} = y_{ki,1} - y_{ki};$$

$$\Delta y_{ki,2} = y_{ki,2} - y_{ki}; \dots; \quad (16)$$

$$\Delta y_{ki,n} = y_{ki,n} - y_{ki},$$

где y_{ki} – исходная координата рассматриваемой точки в i-й итерации.

Новая координата рассматриваемой точки находится из выражения:

$$y_{ki,n} = y_{ki} - \Delta y_{ki,cp}, \quad (17)$$

в котором

$$\Delta y_{ki,cp} = (\Delta y_{ki,1} + \Delta y_{ki,2} + \dots + \Delta y_{ki,m}) / m$$

– среднее отклонение.

В результате корректировки любая точка массива не должна выходить за пределы ранее установленного «коридора», т.е.

$$|y_{k0} - y_{kj}| < \varepsilon.$$

Если условие не выполняется, то точка смещается на допустимое значение ε . Количество итераций сглаживания ограничивается условием: $\delta J \rightarrow 0$.

Расчеты по описанному алгоритму показали, что хорошие результаты достигаются, если максимальная длина пробела равна трем точкам исходного массива.

Для сравнительной оценки эффективности сглаживания по рас-

смотренным алгоритмам был реализован численный расчет. Результаты расчетов для массива точек спинки пера заготовки с шагом 0,05 по рассмотренным алгоритмам сглаживания приведены в таблице.

Результаты сглаживания и их оценочные показатели

X	Y	$y_{исх}$ (округленные)	y_1 (1 алгоритм)	y_2 (2 алгоритм)	y_3 (3 алгоритм)
0,80	2,2255	2,2	2,2169	2,2121	2,2238
0,85	2,3396	2,3	2,3276	2,3311	2,3485
0,90	2,4596	2,5	2,4788	2,4557	2,4734
0,95	2,5857	2,6	2,6042	2,5849	2,5925
1,00	2,7183	2,7	2,7000	2,7186	2,7000
Значение функционала		5910,3	990,5	96,9	67,5
Кол. итераций			30	32	6

Из таблицы видно, что хорошие результаты сглаживания достигаются при расчетах по 2-му и 3-му алгоритмам. Это согласуется с численными значениями функционалов. Следует отметить, что расчеты по 3-му алгоритму приводят к удовлетворительным результатам за меньшее количество итераций, т.е. его сходимость является максимальной.

Список литературы

1. Гречников Ф.В., Хаймович И.Н. Разработка информационных систем управления конструкторско-технологической подготовкой производства как интегрированной базы информационных и функциональных структур // Кузнечно-штамповочное производство. – 2008. – № 2. – С. 33–36.
2. Гречников Ф.В., Дровяников В.И., Хаймович И.Н. Анализ характеристик стабильности и размерности информационной системы управления кузнечно-штамповочным производством на Самарском металлургическом заводе «Алcoa» – Кузнечно-штамповочное производство. – 2008. – № 4. – С. 33–36.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1990. – 350 с.
4. Мельников М.А., Ушаков А.И., Фатеев В.А. и др. Методы и программы расчета НДС лопаток / Методы расчета НДС состояния лопаток турбомашин: сб. тр. – М.: ЦИАМ, Труды № 1177, 1997. – С. 257–359.

5. Хаймович И.Н., Хаймович А.И. Процедурные правила разработки и согласования бизнес-процессов кузнечно-штамповочного производства // Вестник СГАУ. – 2007. – № 1. – С. 23–26.

References

1. Grechnikov F.V., Khaimovich I.N. *Kuznechno-shampovochoe proizvodstvo*, 2008, no.2, pp. 33–36.
2. Grechnikov F.V., Drovyanikov V.I., Khaimovich I.N. *Kuznechno-shampovochoe proizvodstvo*, 2008, no.4, pp. 33–36.
3. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Mirishnicenko V.L. *Metody spline-funktsyi* [Methods of the spline-functions]. Moscow, Science, 1990, 350 p.
4. Melnikov M.A., Ushakov A.I., Fateev V.A. *Metody rascheta НДС sostoyaniya lopatok turbomachin* (Methods of calculating the VAT status of turbomachinery blades), Moscow, TsIAM, 1997.
5. Khaimovich I.N., Khaimovich A.I. *Vestnik SGAU*, 2007, no.11, pp. 23–26.

Рецензенты:

Попов И.П., д.т.н., профессор кафедры «Обработка металлов давлением», СГАУ, г. Самара;

Михеев В.А., д.т.н., профессор кафедры «Обработка металлов давлением», СГАУ, г. Самара.

Работа поступила в редакцию 22.11.2013.