

УДК 532:536

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНОГО
РАЗОГРЕВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ДЛЯ ЖИДКОСТИ,
ДЕМОНСТРИРУЮЩЕЙ ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА «ОТВЕРДЕВАНИЯ»,
ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПЕРВОЙ СХЕМЫ ТЕЧЕНИЯ**

Колодежнов В.Н., Капранчиков С.С., Веретенников А.С.

*ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»,
Воронеж, e-mail: kvn117@mail.ru*

На основе ранее предложенной реологической модели, которая учитывает проявление упрочнения при сдвиге или эффекта «отвердевания», проведен анализ трех возможных схем течения неньютоновской жидкости в цилиндрическом канале. В наиболее простом варианте, который условно назван первой схемой течения, жидкость, согласно реологической модели, демонстрирует псевдопластическое поведение со степенным законом вязкости. Для такой схемы течения рассмотрена задача установившегося конвективного теплопереноса с учетом диссипации механической энергии при температурных граничных условиях первого рода на стенках канала. При постановке задачи полагали, что конвективный теплоперенос вдоль оси канала допустимо определять по средней скорости потока. Диссипативную составляющую принимали с учетом точного распределения скорости в поперечном сечении канала. Получено выражение для распределения температуры в канале. Показано, что температурные профили в окрестности стенки канала имеют характерные максимумы. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании течения неньютоновских жидкостей в проточных элементах технологического оборудования.

Ключевые слова: диссипация, неньютоновская жидкость, температура

**MATHEMATICAL MODELING OF DISSIPATIVE HEATING IN A CYLINDRICAL
CHANNEL FOR FLUID THAT DEMONSTRATES THE MANIFESTATION
OF THE «SOLIDIFICATION» AT THE REALIZATION
OF THE FIRST SCHEME CURRENT**

Kolodezhnov V.N., Kapranchikov S.S., Veretennikov A.S.

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education «Voronezh State
University of Engineering Technologies», Voronezh, e-mail: kvn117@mail.ru*

A rheological model that takes into account the manifestation of shear thinning fluid (STF) or the effect of «solidification» has been proposed earlier. On the basis of it the analysis of three possible schemes of the non-Newtonian fluid flow in a cylindrical channel was done. One variant of the current, which is conventionally called the first circuit current was considered. We investigated the liquid, which according to the rheological model shows pseudoplastic behavior with a power law of viscosity. For such a scheme the problem of the steady flow of convective heat transfer with the dissipation of mechanical energy was considered. The problem was solved by setting the temperature of the boundary conditions of the first kind on the channel walls. At the problem definition it was considered that the convective heat transfer along the channel axis is possible to determine according to the average flow rate. The dissipative component was taken into account with the exact velocity distribution in the cross section of the channel. An expression for the temperature distribution in the channel was received. It is shown that the temperature profiles in the vicinity of the channel walls have characteristic peaks. The received results can be used for modeling the flow of non-Newtonian fluids in the flow cell manufacturing equipment.

Keywords: dissipation, non-Newtonian fluid, temperature

Отдельные виды суспензий при соответствующих размерах и концентрации мелкодисперсных частиц демонстрируют особенности реологического поведения [4–8]. С точки зрения зависимости эффективной вязкости $\mu(|\dot{\gamma}|)$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ эти особенности сводятся к следующему. Приближение скорости сдвига к некоторому конечному по величине, критическому значению $\dot{\gamma}_2$ крутизна S кривой течения для зависимости касательного напряжения τ от $\dot{\gamma}$ начинает неограниченно возрастать. На модельном уровне можно полагать, что $S = d|\tau|/d|\dot{\gamma}| \rightarrow \infty$. Поскольку S напрямую характеризует вязкие свойства жидкости, та-

кое поведение суспензий можно интерпретировать как проявление эффекта «упрочнения» или «отвердевания». Также отметим, что отдельные виды таких суспензий [4, 7, 8] демонстрируют немонотонный характер поведения функции $\mu(|\dot{\gamma}|)$. На начальном интервале изменения скорости сдвига от нуля до некоторого порогового значения $\dot{\gamma}_1$ функция $\mu(|\dot{\gamma}|)$ монотонно убывает, и жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение с некоторыми значениями коэффициента консистенции K_1 и индекса течения n_1 . Дальнейшее же увеличение модуля скорости сдвига на интервале $|\dot{\gamma}| \in [\dot{\gamma}_1; \dot{\gamma}_2]$

после прохождения точки минимума приводит к возрастанию эффективной вязкости. При этом жидкость соответственно демонстрирует дилатантное поведение.

В работе [1] предложена реологическая модель, описывающая механическое поведение подобных неньютоновских жидкостей, а в [2] для такой модели рассмотрена задача об установившемся напорном течении в цилиндрическом канале радиуса R . Там же показано, что в зависимости от величины перепада давления Δp на длине канала L возможны три различные схемы течения.

Если перепад давления не превышает некоторого порогового значения Δp_1 , т.е. выполняется условие

$$\Delta p \leq \Delta p_1 = \frac{2 \cdot L \cdot K_1 \cdot \dot{\gamma}_1^{n_1}}{R}, \quad (1)$$

то $|\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_1$, и всюду внутри канала суспензия демонстрирует псевдопластическое поведение. Такая схема течения условно называется первой схемой течения.

Вторая схема течения имеет место в случае, когда выполняется условие

$$\Delta p_1 \leq \Delta p \leq \Delta p_2 = \frac{2 \cdot L \cdot \tau_2}{R},$$

где τ_2 – константа реологической модели суспензии, представляющая собой предельное значение касательного напряжения, достигаемого при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_2$. Для второй схемы течения характерным является то, что в канале можно выделить две зоны тече-

ния. В первой зоне жидкость по-прежнему демонстрирует псевдопластическое поведение, а во второй проявляет дилатантные свойства. Граница раздела между этими зонами представляет собой цилиндрическую поверхность некоторого радиуса $R_{\mu 1} < R$. Естественно, что на этой границе должно выполняться условие $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_1$. При этом первая зона в поперечном сечении канала занимает область в форме круга радиуса $R_{\mu 1}$, а вторая зона – кольцо $R_{\mu 1} < r < R$.

Третья схема течения отличается от двух предыдущих тем, что в окрестности стенки канала формируется третья зона, заполненная материалом «отвердевшей» жидкости. Граница раздела второй и третьей зон представляет собой цилиндрическую поверхность некоторого радиуса $R_{\mu 2}$, который удовлетворяет условию $R_{\mu 1} < R_{\mu 2} < R$.

Рассмотрим задачу о конвективном теплопереносе в цилиндрическом канале неньютоновской жидкости рассматриваемого типа с учетом диссипации механической энергии для первой схемы течения в случае, когда выполняется условие (1). Будем предполагать, что на стенках канала для температуры выполняются граничные условия первого рода.

Введем цилиндрическую систему координат традиционным образом. Уравнение конвективного теплопереноса [3] в цилиндрическом канале с учетом диссипации в безразмерном виде может быть представлено в виде

$$S_1 \cdot u'_m \cdot \frac{\partial T'}{\partial z'} = S_2 \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \tau'_{rz}(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}; \quad (2)$$

$$\tau'_{rz}(\dot{\gamma}) = -\frac{2 \cdot (-\dot{\gamma}')^{n_1}}{La \cdot (1+B) \cdot (\dot{\gamma}'_1)^{n_1}}; \quad B = \frac{\tau_2}{K_1 \cdot (\dot{\gamma}_1)^{n_1}} - 1; \quad S_1 = \frac{G \cdot Re}{2 \cdot Ec \cdot La}; \quad S_2 = \frac{2}{Pr \cdot Ec \cdot La}.$$

Здесь и далее верхним штрихом обозначены безразмерные величины, полученные с учетом соотношений

$$u' = \frac{u}{u_s}; \quad u'_m = \frac{u_m}{u_s}; \quad r' = \frac{r}{R}; \quad \dot{\gamma}' = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_2} = \frac{du'}{dr'};$$

$$\dot{\gamma}'_1 = \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_2}; \quad T' = \frac{T - T_*}{T_{**} - T_*}; \quad p' = \frac{p - p_0}{\Delta p};$$

$$\tau'_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\Delta p}; \quad G = \frac{2 \cdot R}{L}; \quad Pr = \frac{\mu_s \cdot c}{\lambda} = \frac{\tau_2 \cdot c}{\lambda \cdot \dot{\gamma}_2};$$

$$Ec = \frac{u_s^2}{c \cdot (T_{**} - T_*)} = \frac{R^{22} \cdot \dot{\gamma}_2}{c \cdot (T_{**} - T_*)};$$

$$Re = \frac{2 \cdot \rho \cdot u_s \cdot R}{\mu_s} = \frac{2 \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \dot{\gamma}_2^2}{\tau_2};$$

$$La = \frac{2 \cdot \Delta p}{\tau_2}; \quad u_s = R \cdot \dot{\gamma}_2; \quad \mu_s = \tau_2 / \dot{\gamma}_2,$$

где $T = T(r, z)$ – температура жидкости в канале, представляющая собой неизвестную функцию радиальной r и продольной z координат; $u = u(r)$ – распределение скорости в канале; u_m – средняя по сечению скорость; S_1, S_2 – параметры уравнения, определяемые через основные критерии подобия; p, τ_{rz} – давление и касательное напряжение соответственно; p_0 – давление жидкости на выходе из канала; T_{**}, T_*, u_s, μ_s – некоторые характерные значения температуры

среды в канале, а также скорости жидкости и динамической вязкости, принимаемые в качестве масштабных; B – параметр реологической модели; ρ, c, λ – принимаемые постоянными плотность, теплоемкость, теплопроводность среды соответственно; G, Pr, Ec, Re, La – геометрический критерий подобия, а также критерии подобия

Прандтля, Эккерта, Рейнольдса и Лагранжа соответственно.

В уравнении (1) полагаем, что учет конвективной составляющей теплопереноса допустимо проводить на основе средней по сечению канала скорости u_m течения среды в канале, которая определяется следующим образом [2]

$$u'_m = 2 \cdot \int_0^1 r' \cdot u'(r') \cdot dr' = \frac{n_1 \cdot \dot{\gamma}}{(1+3 \cdot n_1)} \cdot \left(\frac{G \cdot La \cdot (1+B)}{8} \right)^{\frac{1}{n_1}}$$

Запишем граничные условия задачи

$$r' = 0; \quad \frac{\partial T'}{\partial r'} = 0; \quad r' = 1; \quad T' = T'_w; \quad z' = 0;$$

$$T' = T'_0; \quad T'_0 = \frac{T_0 - T_*}{T_{**} - T_*}; \quad T'_w = \frac{T_w - T_*}{T_{**} - T_*}, \quad (3)$$

$$T(r', z') = f(r') + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') \cdot \exp(-S_4 \cdot \epsilon_j^2 \cdot z'), \quad (4)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; ϵ_j – корни характеристического уравнения $J_0(\epsilon) = 0$; C_j – коэффициенты разложения.

В (4) для краткости записи приняты следующие обозначения

$$f(r') = T'_w + \frac{S_3 \cdot n_1^2}{S_2 \cdot (1+3n_1)^2} \cdot \left[1 - (r')^{\frac{1}{n_1}+3} \right];$$

$$C_j = \frac{2}{J_1^2(\epsilon_j)} \cdot \int_0^1 \left\{ r' \cdot (T'_0 - T'_w) - \frac{S_3 \cdot n_1^2 \cdot r'}{S_2 \cdot (1+3 \cdot n_1)^2} \cdot \left[1 - (r')^{\frac{1}{n_1}+3} \right] \right\} \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') dr', \quad j = 1, 2, \dots; \quad \text{и(6)}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Для оценки влияния основных параметров модели на характеристики диссипативного разогрева жидкости при ее течении в цилиндрическом канале были проведены численные эксперименты на ЭВМ. В качестве примера на рис. 1 представлено распределение безразмерной температуры по радиальной координате в различных поперечных сечениях канала для следующего набора основных параметров системы: $G = 0,01$; $Pr = 1,295 \cdot 10^6$; $Ec = 2,606 \cdot 10^{-6}$; $Eu = 151,171$; $Re = 2,646$; $La_1 = 605,04$; $\dot{\gamma}_1 = 0,2$; $B = 0,322$; $T'_w = 0$; $T'_0 = 0$. Из представленных на этом рисунке данных видно, что распределение температуры не является монотонным. При этом в окрестности стенки канала температурный профиль имеет экстремум типа максимума.

где T_0 – температура жидкости на входе в канал; T_w – принимаемая постоянной температура стенки канала.

Решая уравнение (1) с учетом (3), можно показать, что распределение температуры в канале определяется следующим образом

$$S_3 = \dot{\gamma}_1 \cdot \left(\frac{La \cdot (1+B) \cdot G^{n_1+1}}{2^{2 \cdot n_1+3}} \right)^{\frac{1}{n_1}};$$

$$S_4 = \frac{S_2}{S_1 \cdot u'_m}$$

Коэффициенты разложения C_j в (4) с учетом свойства ортогональности базисных функций определяются из выражений

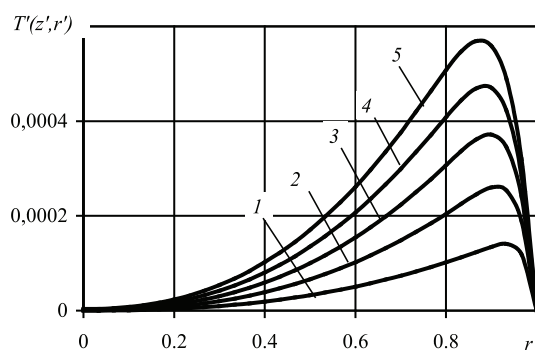


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры по радиальной координате при $La = 400$ для $z' = 0,2$ (1); $0,4$ (2); $0,6$ (3); $0,8$ (4); $1,0$ (5)

Влияние критерия подобия Лагранжа на распределение температуры в выходном сечении канала при том же наборе прочих исходных параметров системы представлено

на рис. 2. Как и следовало ожидать, увеличение критерия подобия Лагранжа приводит для выходного сечения канала к возрастанию как температуры вообще, так и ее пикового значения в частности.

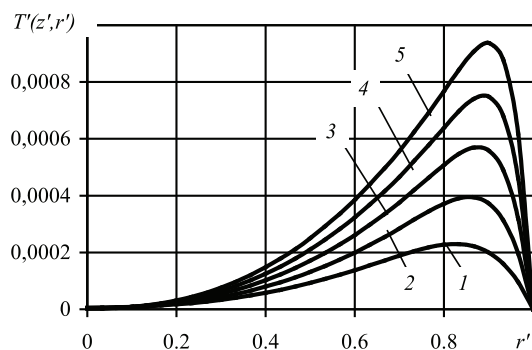


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в выходном сечении канала ($z' = 1$) при следующих значениях критерия подобия Лагранжа: $La = 200$ (1); 300 (2); 400 (3); 500 (4); 600 (5)

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании течения неньютоновских жидкостей с соответствующими реологическими свойствами в проточных элементах технологического оборудования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-08-00629.

Список литературы

1. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование реологического поведения нелинейно-вязких жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта «отвердевания». // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2012. – № 4. – С. 35–38.
2. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование течения в цилиндрическом канале жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта «отвердевания» // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т.9. – № 2. – С. 118–122.
3. Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. – Киев.: Наукова думка, 1990. – 216 с.
4. Jae-Hyun So, Seung-Man Yong, Jae Chun Hyun. Microstructure evolution and rheological responses of hard sphere suspensions // Chemical Engineering Science. – 2001. – Vol. 56. – № 9. – P. 2967–2977.

5. Jeffrey D.J., Acrivos A. The Rheological Properties of Suspensions // AIChE Journal. – 1976. – Vol. 22. – № 3. – P. 417–432.

6. Kalyon D.M., Yaras P., Aral B., Yilmazer U. Rheological behavior of a concentrated suspension: A solid rocket fuel simulant // J. Rheol. – 1993. – Vol. 37. – № 1. – P. 35–53.

7. Lee Y.S., Wagner N.J. Rheological Properties and Small – Angle Neutron Scattering of Shear Thickening, Nanoparticle Dispersion at High Shear Rates // Ind. Eng. Chem. Res. – 2006. – Vol. 45. – № 21. – P. 7015–7024.

8. Young Sil Lee, Norman J. Wagner. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions // Reologica Acta. – 2003. – Vol. 42. – № 3. – P. 199–208.

References

1. Kolodezhnov V.N. Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies. 2012. no. 4. pp. 35–38.
2. Kolodezhnov V.N. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Techniceskogo Universiteta*. 2013. Vol. 9. no. 2. pp. 118–122.
3. Frojsteter G.B., Danilevich S.Ju., Radionova N.V. *Techenije i teploobmen nen'jutonovskih zhidkostej v trubah* [Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in pipes]. Kiev, Naukova dumka, 1990. 216 p.
4. Jae-Hyun So, Seung-Man Yong, Jae Chun Hyun. Microstructure evolution and rheological responses of hard sphere suspensions. *Chemical Engineering Science*, 2001. Vol. 56. no. 9. pp. 2967–2977.
5. Jeffrey D.J., Acrivos A. The Rheological Properties of Suspensions. *AIChE Journal*, 1976. Vol. 22. no. 3. pp. 417–432.
6. Kalyon D.M., Yaras P., Aral B., Yilmazer U. Rheological behavior of a concentrated suspension: A solid rocket fuel simulant. *J. Rheol.* 1993. Vol. 37. no. 1. pp. 35–53.
7. Lee Y.S., Wagner N.J. Rheological Properties and Small – Angle Neutron Scattering of Shear Thickening, Nanoparticle Dispersion at High Shear Rates. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2006, Vol. 45, no. 21. pp. 7015–7024.
8. Young Sil Lee, Norman J. Wagner. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions. *Reologica Acta*. 2003. Vol. 42. no. 3. pp. 199–208.

Рецензенты:

Шашкин А.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Математический и прикладной анализ», ГОУ ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж;

Буховец А.Г., д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и применение математических методов в экономике», ГОУ ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I», г. Воронеж.

Работа поступила в редакцию 01.08.2013.