

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ ПОЛОСЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕФОРМАЦИОННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю.

ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»,
Комсомольск-на-Амуре, e-mail: naj198282@mail.ru

В данной статье описан метод расчета полей деформаций и определения усилий при растяжении полосы, имеющей начальные размеры: длина – l_0 , ширина – a_0 , толщина – f_0 для условия пластичности, связанного с линиями уровня поверхности деформаций. Также дана сравнительная характеристика решений при плоском напряженном состоянии для различных имеющихся критериев пластичности: условие пластичности Мизеса, условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформаций и условие пластичности Треска. В статье изложен алгоритм определения поля скоростей тензора деформаций для нового условия пластичности. Определено усилие необходимое для растяжения полосы и определено изменение толщины пластины с течением времени. В результате вычислений графически были представлены зависимости усилий при различных условиях текучести от тензора деформаций и определены коэффициенты, описывающие изменение геометрии пластин в зависимости от используемого условия пластичности. Данные коэффициенты позволяют экспериментально определить выбор наиболее оптимального условия текучести для конкретного конструкционного материала.

Ключевые слова: деформационно-энергетический критерий, тензор скоростей деформаций, напряжение, поверхность деформаций, линии уровня

ALGORITHM FOR THE EXTENSION OF A STRIP WITH A CONTINUOUS FIELD SPEED OF THE USING DEFORMATION AND ENERGY CONDITIONS OF PLASTICITY

Grigoreva A.L., Grigorev Y.Y.

Komsomolsky-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-na-Amur, e-mail: naj198282@mail.ru

This article describes a method for calculating the deformation fields and the definition of effort at stretching band, which has the initial dimensions: length – l_0 , width – a_0 , thickness – f_0 for the condition of plasticity associated with the level curves of the surface deformations. We also give a comparative analysis of solutions in plane stress for a variety of available criteria of plasticity: Mises yield condition, the condition of plasticity associated with the level curves of the surface deformation and the plasticity condition of Tresca. The article describes an algorithm for determining the velocity field of the strain tensor for the new conditions of plasticity. Determine the forces required to stretch the band and determined the change in thickness of the plate over time. The calculations were graphically shows the efforts at various flow conditions of the strain tensor and the coefficients describing the change in the geometry of the plates, depending on the conditions of plasticity. These factors will determine experimentally the choice of the optimal flow conditions for a specific material of construction.

Keywords: strain-energy criterion, the strain rate tensor, the stress, the surface deformations, the level lines

В данной статье описан метод расчета полей деформаций и определения усилий при растяжении полосы, имеющей начальные размеры: длина – l_0 , ширина – a_0 , толщина – f_0 для условия пластичности, связанного с линиями уровня поверхности деформаций [5]. Также дана сравнительная характеристика решений при плоском напряженном состоянии для различных имеющихся критериев пластичности на рис. 1: условие пластичности Мизеса (III), новое условие пластичности (IV), условие пластичности Треска (I, II).

Рассмотрим растяжение полосы с непрерывным полем скоростей перемещений. Также предположим, что захваты, обеспе-

чивающие перемещение верхнего и нижнего концов образца, не препятствуют движению материала вдоль их оси.

Граничные условия: при $y = 1$, $\sigma_{yy} = 2k$; при $y = -1$, $\sigma_{yy} = 2k$, $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$.

Данные граничные условия приводят к предположению, что весь образец находится в пластическом состоянии с однородным полем напряжений и прямолинейным полем линий скольжения, наклоненных к оси x под углом.

Поле скоростей при плоской деформации с учетом условия текучести, связанное с линиями уровня поверхности деформаций, которая имеет вид [2].

$$\begin{aligned} & (3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sigma_2 - 2\sigma_2^3 + 3\sigma_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)^3) \sqrt{3} + \\ & + ((\sigma_1 - \sigma_2) \sigma_2 - \sigma_2^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2) h' H = 9h'^3 (\sqrt{27} - H^3) \end{aligned}$$

определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial V_x}{\partial x} + 3\frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0 \quad (I), \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} &= 0 \quad (II). \end{aligned} \quad (1)$$

Преобразуя (1) по законам

$$\frac{\partial}{\partial x}(I) - 3\frac{\partial}{\partial y}(II) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}(I) - 2\frac{\partial}{\partial x}(II),$$

получаем волновые уравнения:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} &= 0; \\ 3\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

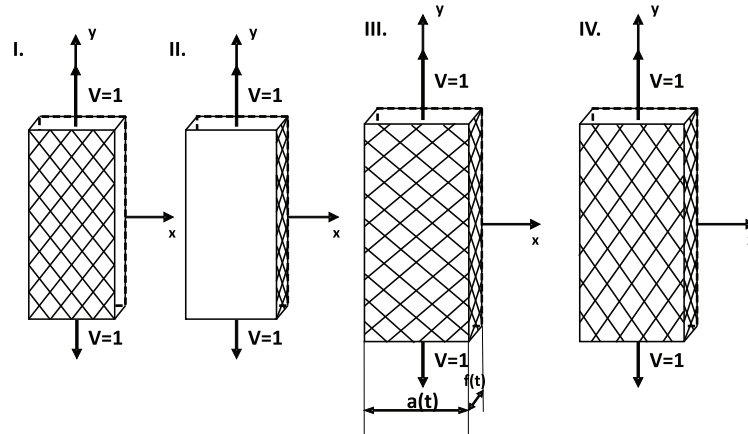


Рис. 1. Полоса: длина – l_0 , ширина – a_0 , толщина – f_0
Условие пластичности Мизеса (III), новое условие пластичности (IV),
условие пластичности Треска (I, II). V – скорость растяжения полосы

Общее решение системы (2) имеет вид:

$$\begin{cases} V_x = \theta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} x \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{2}} x \right); \\ V_y = \psi_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} x \right) + \psi_2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{2}} x \right), \end{cases} \quad (3)$$

где $\theta_1, \theta_2, \psi_1, \psi_2$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Будем рассматривать симметричное пластическое течение с двумя осями симметрии x и y . Граничные условия для скоростей перемещений:

$$\text{при } x = 0 \quad V_x = 0, \quad \text{при } y = 0 \quad V_y = 0,$$

$$\text{при } x = a \quad V_x = \text{const}, \quad \text{при } y = 1 \quad V_y = V. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \right), \\ 0 &= \psi_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} y \right) + \psi_2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y \right). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \theta_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x \right) &= \theta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \right) = \theta \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \right); \\ \psi_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y \right) &= -\psi_2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y \right) = \psi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При дифференцировании уравнений (3) возможно приобретение новых решений. Подставим (5) в (2):

$$-\psi'_1 + \psi'_2 + \theta'_1 + \theta'_2 = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\psi'_1 + \psi'_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta'_1 - \theta'_2) = 0. \quad (6)$$

Учитывая (6),

$$-\psi' - \psi' + \theta' + \theta' = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\psi' - \psi') + \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta' - \theta') = 0, \quad (7)$$

откуда следует, что $\psi' = \theta'$.

Пусть $\psi' = \theta' = A'$, где A – некоторая дифференцируемая функция. Тогда $A = \theta = \psi + C$, $C = \text{const}$. Из граничных условий (4) получим:

$$\begin{aligned} V_y &= A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) = 0; \\ V_x &= A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right) - A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right) + C. \end{aligned} \quad (8)$$

Из первого равенства (8) следует, что функция $A(t)$ нечетная, из второго – $C = 0$.

Общее решение системы уравнений (2) при данных граничных условиях определяется в виде

$$\begin{cases} V_x(x, y) = A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) - A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right); \\ V_y(x, y) = A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right), \end{cases} \quad (9)$$

где $A(t)$ – нечетная дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям.

Объемная плотность мощности энергии диссипации $\frac{dW}{dt}$, учитывая граничные условия, запишется в виде

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = 2k \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{4}{\sqrt{3}} k \cdot A', \quad A' > 0.$$

Определим вид функции $A = c \cdot t$. Тогда общий вид решения будет иметь вид:

$$\begin{cases} V_x = c\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) - c\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right); \\ V_y = c\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + c\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} v_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (12)$$

В развернутом виде для случая плоского напряженного состояния [3] систему (12) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{dE_{11}}{dt} + 2E_{11}\varepsilon_{11} + 2E_{12}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{11}; \\ \frac{dE_{12}}{dt} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{11}\frac{\partial V_x}{\partial y} + E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{12}; \\ \frac{dE_{22}}{dt} + 2E_{22}\varepsilon_{22} + 2E_{21}\frac{\partial V_x}{\partial y} = \varepsilon_{22}; \\ \frac{dE_{33}}{dt} = \varepsilon_{33}. \end{cases} \quad (13)$$

при граничных условиях $y = l$, $V_y = V$ из второго уравнения системы (9) следует, что

$$V_y = V = c \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} l, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2} V l$$

получаем:

$$\begin{aligned} V_y(x, y) &= \frac{V}{l} y; \\ V_x(x, y) &= -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}l} x. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}l}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{V}{l}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0; \\ \varepsilon_{zz} &= -(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) = \frac{V(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}l}. \end{aligned}$$

Главные значения тензора скоростей деформаций вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{V}{2\sqrt{2}l} (\sqrt{7 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{2} - \sqrt{3}); \\ \varepsilon_2 &= \frac{V}{2\sqrt{2}l} (-\sqrt{7 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{2} - \sqrt{3}); \\ \varepsilon_3 &= -\frac{V(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}l}. \end{aligned}$$

Компоненты тензоров E_{ij} и ε_{ij} связаны уравнениями

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} v_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (12)$$

В развернутом виде для случая плоского напряженного состояния [3] систему (12) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{dE_{11}}{dt} + 2E_{11}\varepsilon_{11} + 2E_{12}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{11}; \\ \frac{dE_{12}}{dt} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{11}\frac{\partial V_x}{\partial y} + E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{12}; \\ \frac{dE_{22}}{dt} + 2E_{22}\varepsilon_{22} + 2E_{21}\frac{\partial V_x}{\partial y} = \varepsilon_{22}; \\ \frac{dE_{33}}{dt} = \varepsilon_{33}. \end{cases} \quad (13)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= k (\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\gamma); \\
 E_{22} &= k (\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\gamma); \\
 E_{33} &= -2\sqrt{3}k \cos \omega; \quad E_{12} = k \sin \omega \cos 2\gamma; \\
 \varepsilon_{11} &= k (\sqrt{3} \cos \omega_1 - \sin \omega_1 \cos 2\gamma_1); \\
 \varepsilon_{22} &= k (\sqrt{3} \cos \omega_1 + \sin \omega_1 \cos 2\gamma_1); \\
 \varepsilon_{33} &= -2\sqrt{3}k \cos \omega_1, \quad \varepsilon_{12} = k \sin \omega_1 \cos 2\gamma_1,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $\omega(x, y)$, $\omega_1(x, y)$ – неизвестные функции, характеризующие положение точки; γ, γ_1 – углы между первым главным направлением и осью x . В нашем случае при одноосном растяжении

в плоском напряженном состоянии нормаль к свободному контуру совпадает с одним из главных направлений и $\gamma = \gamma_1 = 0$.

Подставим (14) в (13), получим

$$\left\{ \begin{aligned}
 &(-\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega \cos 2\gamma) \frac{d\omega}{dt} + 2 \sin \omega \sin 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} + \\
 &2k(3 \cos \omega \cos \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1 \sin \omega \cos 2\gamma + \sin \omega \sin \omega_1 \cos^2 2\gamma) - \\
 &-\sqrt{3} \cos \omega \sin \omega_1 \cos 2\gamma + 2 \sin \omega \sin 2\gamma \frac{\partial V_y}{\partial x} = \sqrt{3} \cos \omega_1 - \sin \omega_1 \cos 2\gamma, \\
 &\cos \omega \sin 2\gamma \frac{d\omega}{dt} - 2 \sin \omega \cos 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} + k \sin \omega \sin 2\gamma \times \\
 &\times (\sqrt{3} \cos \omega_1 + \sin \omega_1 \cos 2\gamma) + (\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\gamma) \frac{\partial V_x}{\partial y} + \\
 &+ k \sin \omega \sin 2\gamma (\sqrt{3} \cos \omega_1 - \sin \omega_1 \cos 2\gamma) + \sin \omega \cos 2\gamma \frac{\partial V_y}{\partial x} = \\
 &= \sin \omega_1 \cos 2\gamma, \\
 &-\sqrt{3}k \sin \omega \frac{d\omega}{dt} + k \cos \omega \cos 2\gamma \frac{d\omega}{dt} - 2k \sin \omega \sin 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} + \\
 &+ 2k \sin \omega \sin 2\gamma \frac{\partial V_x}{\partial y} + 2k^2 (\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\gamma) \times \\
 &\times (\sqrt{3} \cos \omega_1 + \sin \omega_1 \cos 2\gamma) = k (\sqrt{3} \cos \omega_1 + \sin \omega_1 \cos 2\gamma), \\
 &\sin \omega \frac{d\omega}{dt} = -\cos \omega_1.
 \end{aligned} \right.$$

Получаем общее решение системы:

$$\begin{aligned}
 \cos \omega_1 &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\sqrt{3}k}; \\
 \cos \omega_1 &= \frac{V(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{6}kl}.
 \end{aligned}$$

Так как $l = l_0 + Vt$, то

$$\cos \omega_1 = \frac{V(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{6}k(l_0 + Vt)}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
-\cos \omega_1 &= \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \stackrel{(15)}{\Rightarrow} -\frac{V(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}k(l_0 + Vt)} = \sin \omega \frac{d\omega}{dt}; \\
-\int \frac{V(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}k(l_0 + Vt)} dt &= \int \sin \omega d\omega. \\
-\frac{V(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}k} \ln|l_0 + Vt| &= -\cos \omega + C_1, \quad C_1 - \text{const.}
\end{aligned} \tag{16}$$

Так как при $\omega = 0, t = 0$, то

$$C_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})V}{2\sqrt{6}k} \ln|l_0|,$$

Получаем значения

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}k} \ln|l_0 + \bar{\epsilon}| + 1 = \cos \omega;$$

то уравнение (16) будет иметь решение

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}k} \ln|l_0 + \bar{\epsilon}| + 1 &= \cos \omega. \quad (17) \\
\frac{V}{2\sqrt{6}l_0k} \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(1+\bar{\epsilon})} &= \cos \omega_1;
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}k} \ln|l_0 + \bar{\epsilon}| - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{24k^2} \ln^2|l_0 + \bar{\epsilon}|} = \sin \omega.$$

Используя записи, приведенные выше, найдем главные значения E_{ij} :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{2\sqrt{6}k + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}k} \sqrt{4\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})k \ln|1+\bar{\epsilon}| - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \ln^2|1+\bar{\epsilon}|}; \\
E_2 &= \frac{2\sqrt{6}k + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}k} \sqrt{4\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})k \ln|1+\bar{\epsilon}| - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \ln^2|1+\bar{\epsilon}|}; \quad (18) \\
E_3 &= -\frac{2\sqrt{6}k + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Найдем связь между относительным удлинением образца и главными инвариантами E_{ij}

$$\begin{aligned}
e &= 0, \quad g = k^2 \left(8 \left(1 + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{6}k} \right)^2 - 1 \right), \\
f &= \sqrt{3}k^3 \left(1 + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{6}k} \right) \left(4 \left(1 + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ln|1+\bar{\epsilon}|}{2\sqrt{6}k} \right)^2 - 1 \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Определим изменение ширины полосы a с течением времени:

$$a(t) = a_0 - \int_0^t \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{l} a(t) dt.$$

Дифференцируя по t , получим:

$$a' = -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)} a; \quad a(t)|_{t=0} = a_0;$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)} a; \\ \int \frac{da}{a} &= -\int \frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)} dt; \\ \ln|a| &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln|l_0 + Vt| + \ln C_3, \\ C_3 &= \text{const},\end{aligned}$$

так как $a(t)|_{t=0} = a_0$, то $C_3 = a_0 l_0^{\sqrt{3/2}}$.

$$a(t) = \frac{a_0 l_0^{\sqrt{3/2}}}{(l_0 + Vt)^{\sqrt{3/2}}}. \quad (20)$$

Определим усилие, необходимое для растяжения полосы:

$$\begin{aligned}P = 2a\sigma_{22} &= 4k \frac{a_0 l_0^{\sqrt{3/2}}}{(l_0 + Vt)^{\sqrt{3/2}}} = \frac{4ka_0}{(1 + \bar{\epsilon})^{\sqrt{3/2}}}; \\ \frac{P}{4a_0 k} &= \frac{1}{(1 + \bar{\epsilon})^{\sqrt{3/2}}}. \quad (21)\end{aligned}$$

Определим изменение толщины пластины с течением времени:

$$f(t) = \frac{f_0 \sqrt{l_0}^{3/2}}{\sqrt{(l_0 + Vt)}^{3/2}}.$$

Выше была рассмотрена задача по растяжению полосы при новом условии пластичности, связанном с линиями уровня поверхности деформаций и получено решение.

При условии текучести Мизеса решение подобной задачи имеет вид:

$$\frac{P}{4ka_0} = \frac{1}{(1 + \bar{\epsilon})^2}.$$

При новом условии текучести, связанном с линиями уровня тензора деформаций было получено решение (21). При решении этой задачи был найден угол между линией характеристик и осью x . Угол $\psi = 50^\circ 57'$ [5]. В отличие от условия текучести Мизеса $\psi = 54^\circ 44'$

На рис. 2 представлены зависимости усилий при различных условиях текучести от деформаций $\bar{\epsilon}$. Коэффициенты, описывающие изменение геометрии пластин, задаются формулами:

$$\begin{aligned}\frac{a(t)}{f(t)} &= \frac{a_0}{f_0} \frac{1}{1 + t/l_0} - \text{для условия пла-} \\ \text{стичности Мизеса,} \\ \frac{a(t)}{f(t)} &= \frac{a_0}{f_0} \frac{1}{(\sqrt{1 + t/l_0})^{\sqrt{3/2} + 1}} - \text{для нового} \\ &\text{условия пластичности.}\end{aligned}$$

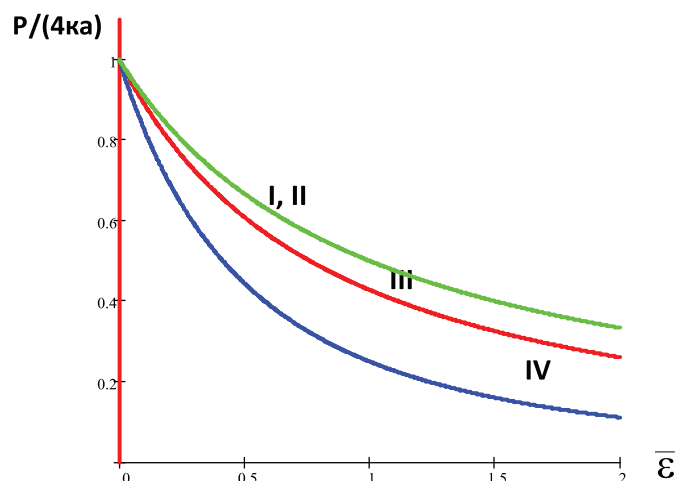


Рис. 2. Зависимости усилий от деформаций $\bar{\epsilon}$ (IV – условие пластичности Мизеса, III – новое условие пластичности, I, II – условие пластичности Треска)

При условии пластичности Треска изменяется лишь один линейный размер: либо a , либо f . Данные коэффициенты позволяют экспериментально определить выбор условия текучести для конкретного конструкционного материала. Аналогичным образом была рассмотрена задача о растяжении полосы с вырезом [1].

Список литературы

1. Григорьев Я.Ю., Патлина О.В., Шацкий А.Н. О расчете предельных пластических деформаций в зоне углового выреза // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». – Периодическое издание, журнал. – Самара: СамГТУ, 2007. – № 1(14). – С. 161–164.

2. Григорьева А.Л. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемых жесткопластического тела // Вестник ЧПУ им. Яковлева серия: механика предельного состояния. – Периодическое издание, журнал. – Чебоксары: ЧПУ. – 2007. – № 1. – С. 33–36.

3. Хромов А.И., Буханько А.А., Григорьева А.Л. Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел // Механика твердого тела. Известия российской академии наук. – 2009. – № 6. – С. 178–186.

4. Хромов А.И., Григорьева А.Л., Кочеров Е.П. Деформационно-энергетический критерий растяжения жесткопластических тел // Доклады Российской академии наук. – 2007. – Т. 413. – № 4. – С. 1–5.

5. Хромов А.И., Григорьева А.Л., Кочеров Е.П. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жесткопластического тела // Вестник СамГТУ. Сер: физ.-мат.науки. – Вып. 43. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 88–92.

References

1. Grigorev Y.Y., Patlina O.V., Shatskiy A.N. On the calculation of the limit of plastic deformation in the zone corner cutout Herald SamSTU. A series of «Physics and mathematics».

The periodical, magazine, Samara: Samara State Technical University, 2007, Vol. 14, no. 1, pp. 161–164.

2. Grigoreva A.L. The surface of loading connected to lines of level of a surface of deformation statuses of incompressible of a zhestkoplastichesky body. The messenger of ChGPU of Yakovlev a series: mechanics limit status, Periodical, log, Cheboksary, 2007, no. 1, pp. 33–36.

3. Khromov A.I., Bukhanko A.A., Grigoreva A.L. Deformation and energetic criterion of corrupting of zhestkoplastichesky bodies. Mechanics of a solid body. News of the Russian Academy of Sciences, 2009, no. 6, pp. 178–186.

4. Khromov A.I., Grigoreva A.L., Kocherov E.P. Deformation and energetic criterion of stretching of zhestkoplastichesky bodies. Reports of the Russian Academy of Sciences, 2007, Vol. 413, no. 4, pp. 1–5.

5. Khromov A.I., Grigoreva A.L., Kocherov E.P. The surface of loading connected to lines of level of a surface of deformations of an incompressible zhestkoplastichesky body. Messenger of the Samara state technical university. Series: physical and mathematical sciences., Vol. 43, Samara, 2006, pp. 88–92.

Рецензенты:

Амосов О.С., д.т.н., профессор, проректор по информатизации и инновациям Амурского гуманитарно-педагогического государственного университета, заведующий кафедрой информатики, г. Комсомольск-на-Амуре;

Одинокое В.И., д.т.н., профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре;

Ильмушкин Г.М., д.п.н., заведующий кафедрой высшей математики, Димитровградский инженерно-технологический институт, филиал Национального исследовательского ядерного университета МИФИ.

Работа поступила в редакцию 18.06.2012.