УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЛАСТЯХ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА МУСАЕВА В.К. В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Тахо-Годи А.З.

Донской государственный аграрный университет, Ростовская область, Октябрьский район, поселок Персиановский, e-mail: dongau@mail.ru

В работе приводится информация о моделировании волн напряжений при взрывном воздействии в объекте угледобывающих предприятий с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях. Показаны нормальные напряжения в характерных точках исследуемой области. Задачи решаются с помощью численного моделирования двумерных плоских уравнений волновой теории упругости. В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. Численное моделирование волн напряжений в областях сложной формы является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения.

Ключевые слова: моделирование, волны, взрывное воздействие, объект, численный метод, перемещение, напряжение, теория упругости, конечные элементы, алгоритм, комплекс программ

MATHEMATICAL MODELLING OF NON-STATIONARY WAVE OF VOLTAGES IN DEFORMABLE AREAS WITH THE HELP OF THE NUMERICAL METHOD MUSAYEV V.K. IN DISPLACEMENTS

Tacho-Godi A.Z.

Donskoy state agrarian university, Rostov region, October district, p. Persianovskiy, e-mail: dongau@mail.ru

The work gives the information about the simulation of the wave of voltages at explosive impact in the subject of the coal mining enterprises with the help of the numerical method Musayev V.K. in displacements. Shows the normal stresses in the characteristic points of the investigated area. Problems can be solved with the help of numerical simulation of two-dimensional plane wave equation of the theory of elasticity. At the present time are actively applied numerical methods for the solution of various problems of non-stationary mechanics of a deformable solid body. Numerical simulation of waves of stress in the areas of the complex form is an urgent fundamental and applied scientific task. On the basis of a method of finite elements in the movement developed an algorithm and a program package for solving linear flat two-dimensional problems, which allow to solve complex tasks under non-stationary dynamic impacts on structures.

Keywords: simulation, the waves, the explosive impact, object, numerical method, movement, tension, elasticity theory, finite elements, algorithm, complex programs

Некоторые результаты рассматриваемого численного метода приведены в следующих работах [1–10].

Поставленная задача реализуется с помощью уравнений математической нестационарной динамической теории упругости.

Для решения поставленной задачи рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат OXY, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial X}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\ (x, y)\in\Gamma;$$

$$\sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho(C_p^2-2C_s^2)\,\varepsilon_y;$$

$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho(C_p^2-2C_s^2)\,\varepsilon_x;$$

$$\tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy};$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial X};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial Y};$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X};\quad (x, y)\in(\Gamma\cup S),\qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S\,(S_1\cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Начальные условия в области Г зададим в виде

$$u\big|_{t=0}=u_0;\quad v\big|_{t=0}=v_0;$$

$$\dot{u}\big|_{t=0}=\dot{u}_0;\ \dot{v}\big|_{t=0}=\dot{v}_0;\ (x,y)\in\Gamma, \qquad (2)$$

где u_0, v_0, $\dot{u}_0$ и $\dot{v}_0$ – заданные в области Г функции.

Граничные условия зададим в виде:

• составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе S_1

$$\sigma_x l+\tau_{xy}m=A_x;$$

$$\tau_{xy}l+\sigma_y m=A_y;\ (x,y)\in S_1; \qquad (3)$$

• составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе S_2

$$u=B_x;\ v=B_y;,\ ,(x,y)\in S_2, \qquad (4)$$

где l и m – направляющие косинусы; A_x, A_y, B_x и B_y – заданные на границе S функции.

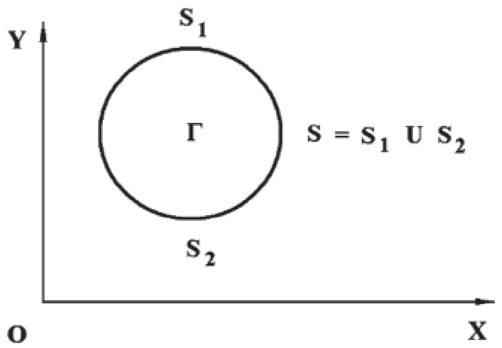

Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат OXY

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1–4) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{\mathrm{H}}\ddot{\vec{\Phi}}+\overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi}=\vec{R};$$

$$\vec{\Phi}\big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0;\ \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (5)$$

где $\overline{\mathrm{H}}$ – матрица инерции; $\overline{\mathrm{K}}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях линейную задачу с начальными и граничными условиями (1–4) привели к линейной задаче Коши (5).

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{\mathrm{H}}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}}+\overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi}=\vec{R};\ \frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\dot{\vec{\Phi}}\ . \qquad (6)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (6) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}=\dot{\vec{\Phi}}_i+\Delta t\overline{\mathrm{H}}^{-1}(-\overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i);$$

$$\vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}, \qquad (7)$$

где Δt– шаг по временной координете.

Определим упругое контурное напряжение на границе области, свободной от нагрузок.

С помощью вырождения прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками получим контурный конечный элемент с двумя узловыми точками (рис. 2).

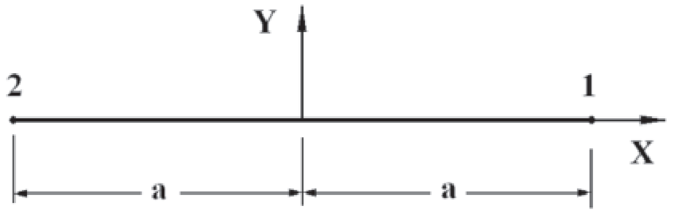

Рис. 2. Контурный конечный элемент с двумя узловыми точками

При повороте оси x на угол α против часовой стрелки получим упругое контурное напряжение σ_k в центре тяжести контурного конечного элемента с двумя узловыми точками

$$\sigma_k = (E / (2a(1-\nu^2)))((u_1 - u_2)\cos\alpha + (v_1 - v_2)\sin\alpha). \qquad (8)$$

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках

$$\Delta t = k\frac{\min \Delta l_i}{C_p},\ (i = 1, 2, 3, ...), \qquad (9)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при взрывных воздействиях на уникальные сооружения.

При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Автор выражают благодарность Мусаеву В.К. за внимание к работе.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

2. Мусаев В.К. О безопасности сложных технических систем при нестационарных динамических воздействиях в детерминированной постановке // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы VIII Международной конференции. – М.: РГГУ, 2000. – С. 243–244.

3. Мусаев В.К. Численное решение некоторых задач безопасности жизнедеятельности с помощью метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 17–23.

4. Мусаев В.К. О разрушениях в сложных деформируемых телах, вызванных импульсными воздействиями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 36–42.

5. Мусаев В.К. О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.

6. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

7. Мусаев В.К. Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2 (XXVII). – С. 138–149.

8. Тахо-Годи А.З., Ситник С.В., Куранцов В.В., Кормилицин А.И., Акатьев С.В. Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении задачи об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 280–284.

9. Тахо-Годи А.З. О методе решения нестационарных волновых задач с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Безопасность и экология технологических процессов и производств». – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет. – 2012. – С. 73–78.

10. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Sent Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. – Vol. 3. – P. 87–97.

References

1. Musayev V.K. The numerical solution of the wave of elasticity and plasticity // Bulletin of the Russian University of Peoples' Friendship. Applied Mathematics Series. 1997. no. 1. pp. 87–110.

2. Musayev V.K. On the safety of complex technical systems with time-dependent dynamic effects in the deterministic setting // Problems of security management of complex systems. Proceedings of the VIII International Conference.M.: RSU. 2000. pp. 243–244.

3. Musayev V.K. The numerical solution of some problems of life safety with the finite element method // Bulletin of the

Russian University of Peoples' Friendship. A series of complex security problems. 2005. no. 1. pp. 17–23.

4. Musayev V.K. Destruction, complex deformable bodies caused by impulses // Bulletin of the Russian University of Peoples' Friendship. A series of complex security problems. 2006. no. 1. pp. 36–42.

5. Musayev V.K. Some possibilities of mathematical modeling and numerical computer simulation // Bulletin of the Russian University of Peoples' Friendship. A series of complex security problems. 2006. no. 1. pp. 81–86.

6. Musayev V.K. Mathematical modeling of elastic stress waves in complex deformable bodies // Bulletin of the Russian University of Peoples' Friendship. A series of complex security problems. 2007. no. 1. pp. 62–76.

7. Musayev V.K. Computer experiment for modeling unsteady stress waves in a complex domain // Research on the theory of structures. 2010. no. 2 (VIIIXX). pp. 138–149.

8. Taho-Gody A.Z., Sitnik S V., Kurantsov V.V., Kormilitsin A.I., Akatiev S.V. Reliability of the results of the numerical method Musayev V.K. the displacement for the problem of the reflection of elastic stress waves in the form of a delta function from the free surface // Technosphere safety, reliability, quality, energy and resource conservation: V. 38. Materials of International scientific and practical conference. Edition VIII. Vol. 2. Rostov-on-Don: Rostov State University of Civil Engineering. 2011. pp. 280–284.

9. Taho-Gody A.Z. A method for the unsteady wave problems using numerical method Musayev V.K. in displacement // Materials of International scientific and practical conference «Safety and ecology of technological processes and productions». Village Persianovskiy of Rostovregion: Don State Agrarian University. 2012. pp. 73–78.

10. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. Sent-Louis: University of Missouri-Rolla. 1991. Vol.3. pp. 87–97.

Рецензенты:

Мусаев В.К. Оглы, д.т.н., профессор, директор научно-производственной фирмы «Интерсейм», г. Пушкино;

Шаршак В.К., д.т.н., профессор кафедры «Механика, машины и оборудование пищевых производств» Донского государственного аграрного университета, г. Новочеркасск.

Работа поступила в редакцию 18.10.2012.