

УДК 519.711.3

## ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПОРТФЕЛЬ С ПЕРЕМЕННЫМ ОБЪЕМОМ ФОНДА ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Семенчин Е.А., Шаталова А.Ю.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»,  
Краснодар, e-mail: al-shatalova@yandex.ru

В статье обобщена математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком от реализации  $m$  инвестиционных проектов. Рассмотрен инвестиционный портфель с переменным объемом инвестиционного фонда. Данная статья основана на методике решения задачи о минимизации начальной суммы, инвестируемой банком в рассматриваемые  $m$  проекты с целью получения прибыли. Предполагается, что инвестиционный фонд банка может пополняться каждый месяц как за счет специально выделяемых банком денежных средств, так и за счет прибыли, получаемой от реализации инвестиционных проектов. Т.о. текущие инвестируемые средства в рассматриваемые проекты будут равны сумме специально выделенных банком денежных средств плюс прибыль, полученная от реализации инвестиционных проектов за предыдущий период времени. В работе также используются формулы среднего риска и средней продолжительности инвестирования проектов. Полученные результаты реализованы в программном продукте в среде программирования MATLAB.

**Ключевые слова:** инвестиционный проект, инвестиционный портфель, индекс риска, инвестиционный фонд, целевая функция, объем инвестирования

## OPTIMIZATION OF INVESTMENT PORTFOLIO WITH CHANGEABLE BUDGET OF INVESTMENT

Semenchin E.A., Shatalova A.U.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: al-shatalova@yandex.ru

The article summarizes the mathematical model of optimization of  $m$  investment project, which bank gets. There are investment portfolio with changeable budget of investment fund. This article is based on the method of solving the problem of minimizing the initial amount invested in the bank considered  $m$  project for profit. It is assumed that the bank's investment fund may be replenished every month due to a special allocation of funds by the bank, and the profits derived from sales of investment projects. Current invested money in projects considered to be equal to the amount of dedicated funds by the bank plus the profit received from realization of investment projects for the previous period. The article is used the formula of average risk and average duration of investment projects too. The getting result is realized in MATLAB.

**Keywords:** investment project, investment portfolio, risk index, investment fund, objective function, volume of investment

В [3] описана методика решения задачи о минимизации начальной суммы, инвестируемой банком в рассматриваемые  $m$  проекты с целью получения прибыли.

В данной работе исследована тесно связанная с этой задачей задача о максимизации прибыли, получаемой банком от реализации в течении  $n$  месяцев данных проектов при условии, что инвестиционный фонд банка будет ежемесячно пополняться как за счет средств, специально выделяемых банком, так и за счет прибыли от инвестируемых проектов.

### Постановка задачи

Банку необходимо проинвестировать, реализовать и получить прибыль от  $m$  проектов в течение  $n$  ( $n \geq 2$ ) месяцев.

Первоначальный объем инвестиционного капитала банка составляет  $s$  рублей. Бюджет инвестиционного фонда будет пополняться банком каждый  $i$ -й ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) месяц на сумму  $g_i$  ( $g_i \geq 0$ ) рублей ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) за счет специально выделяемых банком денежных средств. Сумма устанавли-

вается заранее. Кроме того, предполагается, что пополнение инвестиционного фонда осуществляется в моменты  $k_j$  за счет прибыли, получаемой от реализации каждого  $j$ -го инвестиционного проекта,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Обратим внимание, что в  $n$ -м месяце инвестиционный фонд будет пополняться уже не за счет специально выделяемых банком денежных средств, а лишь за счет прибыли, получаемой от реализации этих инвестиционных проектов, т.к., если бы вложение денежных средств осуществлялось в  $n$ -м месяце, то возврат денежных средств от данного инвестирования должен был произойти в  $n + 1$ -м месяце. Однако подобная операция невозможна: по соглашению каждый проект должен быть проинвестирован, реализован и получена прибыль от него в течении  $n$  месяцев (и не более).

Кроме того, предполагается, что в течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов не превышает  $l$  ( $l = \text{const}$ ), средняя продолжительность инвестирования проектов не превышает  $r$  месяцев ( $r = \text{const}$ ), периодичность инвестиро-

вания банком  $j$ -го проекта равна  $k_j$  месяцам ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), величина прибыли, которую он ожидает получить от реализации  $j$ -го проекта, составляет  $\delta_j$  процентов от размера инвестируемой суммы, индекс риска для  $j$ -го проекта составляет  $s_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Цель данной работы – построить математическую модель, позволяющую максимизировать прибыль банка, которую он получит к концу  $n$ -го месяца за счет инвестирования всех рассматриваемых проектов на условиях, указанных выше.

### Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования

Обозначим, как и в [3], через  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_j, \dots$ , – все возможные делители числа  $n$ ,  $k_m = n$  ( $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_m$ ), где  $k_j$  совпадает с периодом инвестирования банком  $j$ -го ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) проекта.  $L_\alpha(\beta)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, (m-2)$ ) – заключительный момент инвестирования  $\beta$ -го ( $\beta = 2, 3, \dots, (m-1)$ ) проекта.

Рассматриваемые инвестиционные проекты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Данные о инвестиционных проектах, реализуемых банком в течение  $n$  месяцев

Инвестиционные проекты	Периодичность инвестирования проектов (мес.)	Моменты инвестирования проектов	Процент прибыли	Индекс риска
1	1	1, 2, 3, ..., n	$\delta_1$	$s_1$
2	$k_2$	$\underbrace{1, 1+k_2, 1+2k_2, \dots, L_1(2)}_{\frac{n}{k_2}}$ где $L_1(2) < n$ , $n-L_1(2) < k_2$	$\delta_2$	$s_2$
3	$k_3$	$\underbrace{1, 1+k_3, 1+2k_3, \dots, L_2(3)}_{\frac{n}{k_3}}$ где $L_2(3) < n$ , $n-L_2(3) < k_3$	$\delta_3$	$s_3$
...	...	...	...	...
$j$	$k_j$	$\underbrace{1, 1+k_j, 1+2k_j, \dots, L_{j-1}(j)}_{\frac{n}{k_j}}$ где $L_{j-1}(j) < n$ , $n-L_{j-1}(j) < k_j$	$\delta_j$	$s_j$
...	...	...	...	...
$m$	$n$	1	$\delta_m$	$s_m$

Кроме того (см. [3]), обозначим через  $X_v(j)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) – объем инвестирования в момент  $v$  в инвестиционный проект  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). В соответствии с табл. 1 для каждого  $j$ -го проекта переменная  $X_v(j)$  в каждый момент  $v$  будет иметь вид:

для 1-го проекта

$$\underbrace{X_1(1), X_2(1), X_3(1), \dots, X_j(1), \dots, X_n(1)}_n;$$

для 2-го проекта

$$\underbrace{X_1(2), X_{1+k_2}(2), X_{1+2k_2}(2), \dots, X_{1+(j-1)k_2}(2), \dots, X_{L_1(2)}}_{\frac{n}{k_2}};$$

для 3-го проекта

$$\underbrace{X_1(3), X_{1+k_3}(3), X_{1+2k_3}(3), \dots, X_{1+(j-1)k_3}(3), \dots, X_{L_2(3)}}_{\frac{n}{k_3}}; \quad (1)$$

.....

для  $j$ -го проекта

$$\underbrace{X_1(j), X_{1+k_j}(j), X_{1+2k_j}(j), \dots, X_{1+(j-1)k_j}(j), \dots, X_{L_{j-1}}(j)}_{\frac{n}{k_j}};$$

.....  
 для  $m$ -го проекта –

$$X_1(m),$$

где  $n, \frac{n}{k_1}, \frac{n}{k_2}, \frac{n}{k_3}, \dots, \frac{n}{k_m} = 1$  – число различных объемов инвестирования в  $v$ -м месяце ( $v = 1, 2, \dots, n$ ).

Условие максимизации объема прибыли, получаемой банком от реализации рассматриваемых инвестиционных проектов, будет иметь вид:

$$F = \sum_{j: k_j: n} (1 + 0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(j) \rightarrow \max. \quad (2)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы вложений  $X_v(j)$  ( $v = 1, 2, \dots, n, j$ ). Согласно постановке задачи (см. п.2), компания имеет рублей ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) для вложения в инвестицион-

ные проекты  $i$ -м месяце ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) (см. п. 1). Согласно этому условию, объем всех денежных средств в 1-м месяце, инвестируемых в инвестиционные проекты, должен быть равен рублей:

$$\sum_{j=1}^m X_1(j) = g_1. \quad (3)$$

– суммарный объем вложений в инвестиционные проекты на конец первого месяца.

Текущие инвестируемые средства в рассматриваемые проекты в  $i$ -м месяце будут равны сумме специально выделенных банком денежных средств ( $g_i$  рублей ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ )) плюс прибыль, полученная от реализации инвестиционных проектов за предыдущий период времени:

$$(1 + 0,01\delta_1)X_1(1) + g_2 = \sum_{j: k_j: 2} X_2(j)$$

– объемы вложений на конец второго месяца;

$$\sum_{j: k_j: (v-1)} (1 + 0,01\delta_j)X_{v-1}(j) + g_v = \sum_{j: k_j: v} X_v(j) \quad (4)$$

– объемы вложений на конец  $v$ -го месяца;

$$\sum_{j: k_j: (n-2)} (1 + 0,01\delta_j)X_{n-2}(j) + g_{n-1} = \sum_{j: k_j: (n-1)} X_{n-1}(j)$$

– объемы вложений на конец  $n - 1$ -го месяца;

здесь  $\sum_{j: k_j: v-1}$  – означает суммирование по

тем  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j$  является делителем  $(v - 1)$ , т.е. суммируются только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Объемы вложений на конец  $n$ -го месяца отсутствуют, поэтому и сумма для  $n$ -го месяца также отсутствует.

Последнее соотношение не содержит отрицательных слагаемых (вычитаемого), т.к. вложения, как отмечалось выше, согласно постановке задачи, не будут осуществляться в  $n$ -м месяце.

Согласно формуле для вычисления индекса среднего риска, для первого периода времени индекс среднего риска, не превышает величины  $l$  [4]:

$$\frac{X_1(1)s_1 + X_1(2)s_2 + \dots + X_1(m)s_m}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq l,$$

для второго периода –

$$\frac{X_2(1)s_1 + X_2(2)s_2 + \dots + X_2(m)s_m}{X_2(1) + X_2(2) + \dots + X_2(m)} \leq l,$$

.....  
 для периода  $v$  ( $v \neq 1$ ), –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_v(j)s_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(j)s_j + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)s_j}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_v(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(j) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)} \leq l, \quad (5)$$

.....  
 для периода  $n$  –

$$\frac{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_n(j)s_j + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_\psi(j)s_j + X_1(m)s_m}{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_n(j) + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_\psi(j) + X_1(m)} \leq l,$$

где  $\sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)}$  – означает суммирование по тем  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j < v$  и  $k_j$  является делителем  $(v-1)$ ,  $\sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)}$  – означает суммирование по тем  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j < v$  и  $k_j$  не является делителем  $(v-1)$ ;  $\psi$  – индекс, совпадающий

с индексом слагаемого из предыдущего соотношения для  $(v-1)$ -го месяца, которое зависит от того же  $j$ -го ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) инвестиционного проекта, т. е. суммируются только те объемы вложений, которые уже вернулись в банк на текущий момент времени с учетом указанной прибыли.

Из соотношений (5) следует:

$$(s_1 - l)X_1(1) + (s_2 - l)X_1(2) + \dots + (s_m - l)X_1(m) \leq 0;$$

$$\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_v(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)(s_j - l) \leq 0; \quad (6)$$

$$(s_1 - l)X_n(1) + \dots + (s_m - l)X_1(m) \leq 0.$$

Согласно формуле для вычисления средней продолжительности инвестирования и введенному выше ограничению, имеем [3, 5]:

для первого месяца –

$$\frac{X_1(1) \cdot 1 + X_1(2)k_2 + \dots + X_1(m)k_m}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq r,$$

для второго месяца –

$$\frac{X_2(1) + X_1(2)(k_2 - 1) + \dots + X_1(m)(k_m - 1)}{X_2(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq r, \quad k_m = n,$$

.....  
 для  $v$ -го месяца –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_i(j)k_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(j)(k_j - (v-1)) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)(k_j - (v-1))}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_i(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(j) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)} \leq r, \quad (7)$$

.....  
 для  $n$ -го месяца –

$$\frac{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_n(j)k_j + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_\psi(j)(k_j - (n-1)) + X_1(m)}{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_p(j) + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \neq i:(n-1)} X_\psi(j) + X_1(m)} \leq r,$$

где  $\sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)}$  – означает суммирование по тем  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j < v$  и  $k_j$  является делителем  $(v - 1)$ ;  $\sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)}$  – означает суммирование по тем  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j < v$  и  $k_j$  не является де-

лителем  $(v - 1)$ ,  $\psi$  – индекс, совпадающий с индексом слагаемого из предыдущего соотношения для  $(i - 1)$ -го месяца, которое зависит от того же  $j$ -го ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) инвестиционного проекта, т. е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Из неравенств (7) следует:

$$(1 - r)X_1(1) + (k_2 - r)X_1(2) + \dots + (n - r)X_1(m) \leq 0,$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_v(j)(k_j - r) + \sum_{j: k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j)((k_j - (v - 1)) - r) + \\ & + \sum_{j: k_j \geq v} X_1(j)((k_j - (v - 1)) - r) \leq 0; \end{aligned} \tag{8}$$

$$(1 - r(v))X_n(1) + \dots + (n - r(v))X_1(m) \leq 0.$$

Очевидно, что:

$$X_1(1) \geq 0, X_2(1) \geq 0, X_3(1) \geq 0, \dots, X_j(1) \geq 0, \dots, X_n(1) \geq 0;$$

$$X_1(2) \geq 0, X_{1+k_2}(2) \geq 0, X_{1+2k_2}(2) \geq 0, \dots, X_{1+(j-1)k_2}(2) \geq 0, \dots, X_{L_1}(2) \geq 0;$$

$$X_1(3) \geq 0, X_{1+k_3}(3) \geq 0, X_{1+2k_3}(3) \geq 0, \dots, X_{1+(j-1)k_3}(3) \geq 0, \dots, X_{L_2}(3) \geq 0; \tag{9}$$

$$\dots \\ X_1(j) \geq 0, X_{1+k_j}(j) \geq 0, X_{1+2k_j}(j) \geq 0, \dots, X_{1+(j-1)k_j}(j) \geq 0, \dots, X_{L_{j-1}}(j) \geq 0;$$

$$\dots \\ X_1(m) \geq 0.$$

Соотношения (2), (3), (4), (6), (8), (9) представляют собой математическую модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов при условии ежемесячного пополнения инвестиционного фонда банка как за счет прибыли от реализации инвестиционных проектов, так и за счет систематического финансирования их банком в размере  $g_i$  рублей ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

### Пример

Банку необходимо проинвестировать, реализовать и получить прибыль от 4-х проектов в течение  $n = 6$  месяцев.

Первоначальный объем инвестиционного капитала банка составляет 500 000 рублей. Бюджет инвестиционного фонда будет пополняться банком в 4-м месяце на сумму 250 000 рублей за счет специально выделяемых банком денежных средств (пополнения инвестиционного фонда в начале 1-го, 2-го, 3-го, 5-го месяцев равны нулю). Кроме того, пополнение инвестиционного фонда будет осуществляться в каждом месяце за счет прибыли, получаемой от реализации этих

же инвестиционных проектов, т.к. наименьшая периодичность инвестирования равна 1 месяц.

Периодичность инвестирования имеющихся четырех инвестиционных проектов (№1, №2, №3, №4) составляет соответственно 1, 2, 3 и 6 месяцев. Процент прибыли по проектам составляет соответственно 1,5; 3,5; 6; 11 процентов ежемесячно от инвестируемой суммы. Индексы рисков для инвестиционных проектов составляют соответственно 1, 4, 9, 7. Средний индекс риска для всех проектов не превышает 6, средняя продолжительность инвестирования этих проектов не превышает 2,5 месяца [2].

При указанных способах и утвержденном графике инвестирования проектов необходимо найти максимальную сумму денег, которую банк может получить по окончании их реализации.

Воспользовавшись математической моделью (2)–(4), (6), (8), (9), методикой решения обобщенной математической модели [6] и программным продуктом MATLAB [2], найдем решение данной задачи:

$$F = 885473,8,$$

$$\begin{aligned}
 &X_1(A_1) = 216298,4; \quad X_2(A_1) = 219542,9; \quad X_3(A_1) = 0; \\
 &X_4(A_1) = 0; \quad X_5(A_1) = 0; \quad X_6(A_1) = 0; \quad X_1(A_2) = 0; \quad X_3(A_2) = 472142,9; \\
 &X_5(A_2) = 488667,9; \quad X_1(A_3) = 222836; \quad X_4(A_3) = 294473,4; \quad X_1(A_4) = 60865,6. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Таким образом, максимальная прибыль составляет 885473 рубля, а соответствующие объемы инвестирования в требуемые моменты времени определяются (10).

#### Список литературы

1. Адамчук А.С., Аммироков С.Р., Щепотьева С.В. Динамическая модель планирования инвестиций в форме задачи линейного программирования // Вестник СевКавГТУ. – 2004. – №1.
2. Кетков Ю.Л. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
3. Семенчин Е.А., Шаталова А.Ю. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков // Фундаментальные исследования. Экономические науки. – 2011 – №13 (часть 1).
4. Ткаченко И.Ю. Инвестиции: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / И.Ю. Ткаченко, Н.И. Малых. – М.: Издательский центр-академия, 2009. – 240 с.
5. Хачатрян С.Р. Методы и модели решения экономических задач / М.В. Пинешня, В.П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.
6. Шаталова А.Ю. Методика решения обобщенной математической модели инвестирования предприятий с учетом рисков // Научный электронный архив. URL: <http://econf.rae.ru/article/6521> (дата обращения: 30.01.2012).

#### References

1. Adamchuk A.S., Amirokov S.R., Schepoteva S.A. dynamic model of investment planning in the form of a linear programming problem // Herald NCSTU. In 2004. no. 1.
2. Ketkov L. MATLAB 7: programming, numerical methods / L. Ketkov, AY Ketkov, M. Schulz. St. Petersburg.: BHV-Petersburg, 2005. 752 p.
3. Semenchin E.A. Shatalov A.A generalized mathematical model of investment companies are subject to risks // Basic Research. Economics. 2011 no. 13 (Part 1).
4. Investment: Textbook. Manual for stud. Higher. Textbook. Institutions / Tkachenko, I. Yu, N. Small. M.: Publishing center-Academy, 2009. 240.
5. Khachatryan S.R. Methods and models to solve economic problems / M.V. Pineshny, V.P. Buyanov. M.: Examination, 2005. 384 p.
6. Shatalov A.Y. method solution of a generalized mathematical model of the investment companies are subject to risks // Scientific electronic archive. URL: <http://econf.rae.ru/article/6521> (date accessed: 30/01/2012).

#### Рецензенты:

Усатиков С.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры общей математики ГОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», г. Краснодар;  
 Лебедев К.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 03.08.2012.