УДК 510.6:378.147

ЭВРИСТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ

[1]Липатникова И.Г., [2]Паршина Т.Ю.

[1]ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», Екатеринбург, e-mail: lipatnikovaig@mail.ru;

[2]ФГБОУ ВПО «Нижнетагильская государственная социально-педагогическая академия», Нижний Тагил, e-mail: info@ntspi.ru

Представлен краткий анализ понятия эвристической задачи с позиций использования её возможностей для организации самообразовательной деятельности. В исследовании эвристические математические задачи выступают в качестве средства формирования когнитивной компетентности будущих учителей математики. Анализ психолого-педагогических работ показывает, что важное место в процессе поиска решения эвристических задач занимает переформулирование их текстов. В нашем исследовании предлагается преобразование текстов задач осуществлять с опорой на формализацию суждений с помощью языков логики высказываний, логики предикатов и изоморфизма интерпретаций. Такая деятельность позволяет уменьшить формализм при осуществлении студентом самоконтроля учебно-познавательной деятельности, обогащает опыт анализа математической информации, расширяет представления о применении языка математики, а значит, служит формированию когнитивной компетентности. Статья содержит примеры эвристических задач элементарной математики, преобразование текстов которых выполнено с использованием указанных средств математической логики.

Ключевые слова: эвристическая задача, когнитивная компетентность, самообразовательная деятельность, математическая логика

THE HEURISTIC MATHEMATICAL PROBLEM AS A MEANS OF FORMING COGNITIVE COMPETENCE

[1]Lipatnikova I.G., [2]Parshina T.Y.

[1]Federal State Budget Educational Institution of Higher Vocational Education «Ural State Pedagogical University», Ekaterinburg, e-mail: lipatnikovaig@mail.ru;

[2]Federal State Budget Educational Institution of Higher Vocational Education «Nizhniy Tagil Social Pedagogical Academy», Nizhniy Tagil, e-mail: info@ntspi.ru

The article under consideration deals with the brief analysis of the notion of heuristic mathematical problem on the basis of using its opportunities for organizing self-educational activities. The research presents heuristic mathematical problems as a means of forming cognitive competence among would-be mathematics students. The analysis of psychological works shows that reformulation of the problem plays a very important role in the process of search for solutions to solve a heuristic mathematical problem. Our research suggests that the transformation of the text of the problem should be carried out on the basis of formalization of reasoning with the help of predicate logic languages and isomorphism of interpretations. This kind of activity allows to diminish formalism in self-controlled work of the students and enriches their experience in analyzing mathematical data, broadens the notion of using mathematical language and as a result helps form cognitive competence. The article contains the examples of heuristic mathematical problems in the field of elementary mathematics, which use the above mentioned means of mathematical logic.

Keywords: heuristic mathematical problem, cognitive competence, self-educational activities, mathematical logic

Одним из требований, предъявляемых к бакалавру педагогического образования, федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования определяет готовность выпускника к «осуществлению профессионального самообразования и личностного роста, проектированию дальнейшего образовательного маршрута и профессиональной карьеры» [5, с. 4]. В результате перед вузами встаёт задача организации учебного процесса, направленного на формирование у студента когнитивной компетентности, которая, как показывает анализ педагогических исследований, характеризует степень сформированности у личности познавательных процессов, компонентов учебно-познавательной деятельности, стремления и готовности к постоянному самообразованию.

Самообразовательная деятельность субъекта непосредственно связана с «открытием» новых знаний. В связи с этим в качестве средств её организации в процессе обучения студентов математических факультетов педагогических вузов элементарной математике предлагаем рассматривать эвристические задачи. В исследовании под *эвристической задачей* понимается задача, поиск решения которой направлен на открытие нужного метода решения.

Вопросы применения эвристических задач в процессе обучения математике исследуются в работах Г.Д. Балка, Б.В. Гнеденко, Г.В. Дорофеева, Н.И. Зильберберга, Ю.М. Колягина, Ю.М. Кулюткина, Т.Н. Мираковой, Ю.А. Паланта, Д. Пойа, Г. И. Саранцева, Е.И. Скафа, Л.М. Фридмана, Р.Г. Хазанкина, С.И. Шапиро, П. М. Эрдниева и других. Но до сих пор возможности эвристических математических задач как средства организации самообразовательной деятельности недостаточно изучены. Под эвристической задачей Е.И. Скафа [4] понимает такую, которая предполагает самостоятельное формулирование способа её решения, в процессе которого ученик попадает в ситуацию проявления своих эвристических позиций. Разработанные автором системы эвристических математических задач приводят к созданию учащимися личного опыта в процессе обучения математике, приобретению приёмов учебно-познавательной эвристической деятельности, что способствует формированию самоорганизации личности.

С.С. Бакулевская [1] рассматривает эвристическую задачу как ситуацию становления интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника. Эвристическая задача трактуется как ситуация проявления эвристических позиций старшеклассника в учебном процессе. Становление интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника сводится к выработке учащимися собственного опыта развития познавательной деятельности в процессе проживания специально созданных учебных ситуаций.

С позиций формирования профессиональных умений студентов экономических специальностей исследуют эвристические задачи И.Д. Белоновская и Л.Г. Шабалина [2].

Необходимым условием овладения умением находить решения эвристических задач Л.М. Фридман и Е.Н. Турецкий считают глубокий и постоянный самоанализ действий по решению задачи и тренировку в решении разнообразных задач. При поиске решения они рекомендуют «действовать в следующих направлениях:

а) вычленять из задачи или разбивать её на подзадачи стандартного вида (способ разбиения);

б) ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов);

в) переформулировать её, заменить равносильной задачей (способ моделирования)» [6, с. 78].

Кроме того, на самоанализ действий по решению задачи обращают внимание А.Я. Канель-Белов и А.К. Ковальджи: «Если какая-то задача особенно понравилась, то, решив её, не переходите сразу к следующей, а подумайте еще над этой. Попробуйте понять:

1) какие идеи привели к решению, чем эта задача похожа или не похожа на другие задачи;

2) где в решении использованы те или иные данные, перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить;

3) можно ли данные и ответ поменять местами, т.е. верно ли обратное утверждение;

4) можно ли обобщить задачу или вывести интересные следствия» [3, с. 5].

Процесс обучения всегда сопряжён с поиском, выбором, извлечением и интерпретацией информации, повышением её уровня и структурированием. К примеру, при решении эвристической задачи студент должен преобразовать представленную информацию, а затем подобрать средства, удобные для её решения, обратиться к различным языкам представления математической информации. Работа с эвристическими задачами в исследовании осуществляется в процессе обучения элементарной математике, которая позволяет одновременно представлять информацию на языках уравнений, неравенств, функций, графических образов, естественном языке. Преобразование информации может происходить как в рамках одного языка, так и как переход к другому. В результате возникает новая задача, которая должна быть равносильной исходной. Математика располагает средствами, позволяющими проверить правомерность замены, – это формализация суждений с помощью языков логики высказываний, логики предикатов и изоморфизма интерпретаций. Проверка преобразованной информации с помощью формализации помогает студенту математически грамотно осуществить самоконтроль учебно-познавательной деятельности. Обращение к идее изоморфизма часто бывает ключевым при поиске модели значимых условий в процессе решения математической задачи.

Таким образом, математическая логика предоставляет три специальных базовых механизма, обеспечивающих более качественную обработку субъектом поступающей математической информации, поэтому служит формированию когнитивной компетентности.

Приведём примеры эвристических задач. Студентам предлагается разобрать готовое решение и выполнить задание по образцу.

1. Задача с использованием языка логики высказываний.

Задача. О *действительном числе с известно, что*

$$\frac{\sqrt{c^2-3c+2}}{c^2-5c+6}\le 0.$$

Можно ли утверждать, что

$$\begin{cases} c^2 - 3c + 2 \geq 0 \\ c^2 - 5c + 6 < 0 \end{cases}?$$

Задание. Запишите на языке высказываний текст задачи и решите.

Образец решения. В задаче речь идёт о логическом следствии. Введём обозначения для чисел, стоящих в числителе и знаменателе дроби

$$c^2 - 3c + 2 = A, \quad c^2 - 5c + 6 = B.$$

Требуется определить, будет ли формула $(A \geq 0) \wedge (B < 0)$ истинна каждый раз, когда истинна $\left(\frac{\sqrt{A}}{B} < 0\right) \vee \left(\frac{\sqrt{A}}{B} = 0\right)$. Дизъюнкция истинна, если хотя бы один её член принимает значение «истина». Пусть $\frac{\sqrt{A}}{B} < 0$ истина, тогда числитель и знаменатель имеют разные знаки, и поскольку в числителе не может быть отрицательного числа, то $(\sqrt{A} > 0) \wedge (B < 0)$. Откуда $(A > 0) \wedge (B < 0)$. Воспользуемся правилом введения дизъюнкции $(A > 0) \Rightarrow (A \geq 0)$, и поскольку $B < 0$ – истина, введём конъюнкцию $(A \geq 0) \wedge (B < 0)$. Пусть теперь $\frac{\sqrt{A}}{B} = 0$, тогда по свойству дроби $(\sqrt{A} = 0) \wedge (B \neq 0)$. Аналогично рассуждая, получим $(A \geq 0) \wedge (B \neq 0)$. Но вывести из $B \neq 0$ условие $B < 0$ невозможно. Действительно, $A = 0$ означает, что $c = 1 \vee c = 2$. При $c = 1$ получим $B = 2$, т.е. $B < 0$ ложно. Итак, есть такое ($c = 1$), что формула $\left(\frac{\sqrt{A}}{B} < 0\right) \vee \left(\frac{\sqrt{A}}{B} = 0\right)$ – истинна, а формула $(A \geq 0) \wedge (B < 0)$ – ложна. Значит, второе высказывание не является следствием первого.

Задание для самостоятельного решения. Запишите на языке высказываний текст задачи и решите.

Задача. О *действительном числе а известно, что*

$$\sqrt{4^a - 5 \cdot 2^{a+1} + 16} \cdot \left(10^{2a+1} - 1001 \cdot 10^a + 100\right) \leq 0.$$

Можно ли утверждать, что

$$\begin{cases} 4^a - 5 \cdot 2^{a+1} + 16 \geq 0 \\ 10^{2a+1} - 1001 \cdot 10^a + 100 < 0 \end{cases}?$$

2. Задача с использованием языка логики предикатов для перевода текста задачи с языка функций на язык уравнений.

Задача. *При каких значениях параметра а нули функции*

$$f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 2a - 5$$

расположены между числами –2 и 4?

Задание. Запишите на языке логики предикатов текст задачи. Прочитайте и запишите новую формулировку задачи. Составьте план решения и решите полученную задачу.

Образец решения. В условии задачи говорится, что как только значение переменной x обращает в нуль функцию, то оно обязательно находится между числами –2 и 4. Имеем дело с логическим следствием. Пусть A – искомое множество значений параметра. Символьная запись текста задачи будет:

$$\underset{a \in A}{\forall a} \ \forall x \ \left(f(x) = 0 \Rightarrow -2 < x < 4\right),$$

или

$$\underset{a \in A}{\forall a} \ \forall x \ \left(x^2 + 2(a-2)x + 2a - 5 = 0 \Rightarrow -2 < x < 4\right).$$

Прочитаем: «При всех значениях параметра a каждый корень уравнения

$$x^2 + 2(a-2)x + 2a - 5 = 0$$

находится в интервале (–2; 4)».

Для решения задачи надо рассмотреть два случая: посылка импликации истинна (уравнение имеет корни) и посылка импликации ложна (уравнение не имеет корней). В первом случае заключение должно быть истинно, во втором – истинностное значение заключения не играет роли. Рассмотрим первый случай. Найдём корни уравнения в зависимости от параметра и потребуем, чтобы каждый из них попадал в интервал (–2; 4). Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a + 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2a - 5 \end{cases}.$$

Можно заметить, что это числа $-2a + 5$ и -1. Второй корень не зависит от a и находится в интервале (–2; 4). Осталось решить неравенство

$$-2 < -2a + 5 < 4.$$

Решаем:

$$-2 - 5 < -2a < 4 - 5; \ -7 < -2a < -1;$$

$$\frac{1}{2} < a < \frac{7}{2}.$$

Разобранный случай показывает, что уравнение всегда имеет корни, т. е. вариант ложной посылки исключён.

Ответ: $a \in (0{,}5;\ 3{,}5)$.

Задание для самостоятельного решения. Запишите на языке логики предикатов текст задачи. Прочитайте и запишите новую формулировку задачи. Составьте план решения и решите полученную задачу.

Задача. При каких значениях a нули функции

$$f(x) = x^2 - 4(a-3)x - 20a + 35$$

расположены между числами –4 и 3?

3. Задача с использованием изоморфизма интерпретаций для перевода текста задачи с языка чисел на язык векторов.

Задача. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ t^2 + z^2 = 9 \\ xt + yz \ge 6 \end{cases}$$

найдите такие, при каждом из которых выражение $x + z$ *принимает наибольшее значение.*

Задание. Подберите подходящий изоморфизм и переведите задачу на язык векторов. Решите полученную задачу.

Образец решения. Если уравнение содержит две переменные, то множество его решений можно воспринимать как множество упорядоченных пар. Рассмотрим множество R^2 и зададим на нём две функции: f и g так:

$$f : R^2 \to R$$

по закону $$(a;\ b) \xrightarrow{f} a^2 + b^2,,$$

$$g : R^2 \times R^2 \to R$$

по закону $$((a;\ b);\ (c;\ d)) \xrightarrow{g} ac + bd.$$

Обозначим V_2 множество векторов плоскости (вектор понимаем как класс сонаправленных и имеющих одинаковые длины отрезков). В этом пространстве введём ортонормированный базис $\left\{\vec{i},\ \vec{j}\right\}$. Для элементов множества V_2 определим по обычным правилам квадрат длины вектора и скалярное произведение двух векторов.

Зададим отображение h множества R^2 во множество V_2, сопоставив каждой паре (a; b) вектор $\vec{n}$, имеющий в базисе $\left\{\vec{i},\ \vec{j}\right\}$ координаты (a; b). Получим биекцию. При этом отображении функции f будет соответствовать функция f' – квадрат длины вектора, а функции g – функция; g' – скалярное произведение двух векторов. Другими словами, h – изоморфизм.

Вводим векторы $\vec{m}(x;\ y)$ и $\vec{n}(t;\ z)$. Первое уравнение превращается в равенство $\left|\vec{m}\right|^2 = 4$, или $\left|\vec{m}\right| = 2$, второе уравнение – в равенство $\left|\vec{n}\right| = 3$, неравенство – в неравенство $\vec{m} \cdot \vec{n} \ge 6$. Требование задачи остаётся тем же.

Эта интерпретация позволяет последнее неравенство превратить в уравнение. Действительно,

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(\vec{m};\ \hat{}\ \vec{n}\right) \le \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Имеем с одной стороны $\vec{m} \cdot \vec{n} \ge 6$, а с другой $\vec{m} \cdot \vec{n} \le 6$. Значит, $\vec{m} \cdot \vec{n} = 6$ и $\vec{m} \cdot \vec{n} = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|$. Последнее возможно только, если угол между векторами равен нулю, т.е. векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправленны: найдётся положительное k такое, что $\vec{m} = k\vec{n}$. Переходя к длинам в последнем равенстве, получим:

$$\left|\vec{m}\right| = k\left|\vec{n}\right|,$$

откуда

$$k = \frac{\left|\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{2}{3}.$$

Переходим в равенстве $\vec{m} = \frac{2}{3}\vec{n}$ к координатам: $x = \frac{2}{3}t,\ y = \frac{2}{3}z.$ Составляем требуемую сумму

$$x + z = \frac{2}{3}t + z.$$

Введём вспомогательный вектор $\vec{s}\left(\frac{2}{3};\ 1.\right)$ Последнее равенство можно записать так:

$$x + z = \vec{s} \cdot \vec{n}.$$

Так как

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = \left|\vec{s}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(\vec{s}\ ;\ \hat{}\ \vec{n}\right),$$

то наибольшее значение суммы будет при $\cos\left(\vec{s}\ ;\ \hat{}\ \vec{n}\right) = 1$, т. е. векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ сонаправленны. Итак, найдётся положительное число q такое, что $\vec{n} = q\vec{s}$, откуда

$$q = \frac{\left|\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Значит,

$$\vec{n} = \frac{9}{\sqrt{13}}\vec{s}$$

и, переходя к координатам, получаем:

$$t = \frac{9}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{3}, \quad t = \frac{6}{\sqrt{13}},$$

$$z = \frac{9}{\sqrt{13}} \cdot 1, \quad z = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Учитывая $x = \frac{2}{3}t$ и $y = \frac{2}{3}z$, находим;

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}}, \quad x = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Ответ:

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}, \quad t = \frac{6}{\sqrt{13}}, \quad z = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Задание для самостоятельного решения. Подберите подходящий изоморфизм и переведите задачу на язык векторов. Решите полученную задачу.

Задача. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ c^2 + d^2 = 4 \\ cb + ad \le -10 \end{cases}$$

найдите такие, при каждом из которых выражение $b + d$ принимает наибольшее значение.

Как показал анализ, в процесс обучения студентов педвуза элементарной математике целесообразно включать эвристические задачи, которые предполагают преобразования математического текста с использованием возможностей математической логики. Это позволит уменьшить формализм при осуществлении студентом самоконтроля учебно-познавательной деятельности, обогатит его опыт анализа математической информации, расширит представления о применении математических языков, что в итоге будет способствовать формированию когнитивной компетентности.

Список литературы

1. Бакулевская С. С. Становление интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника в процессе решения эвристических задач: автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Волгоград: 2001. – 13 с.

2. Белоновская И.Д. Эвристическая задача как средство формирования профессиональных умений студентов экономических специальностей / И.Д. Белоновская, Л.Г. Шабалина // Инновации в образовании: эвристическое обучение [Электронный ресурс]: материалы Всерос. науч.-практ. конф., Москва, 5–7 нояб. 2009 г. / Рос. акад. образования, Центр дистанц. образования «Эйдос», Науч. шк. А.В. Хуторского; под ред. А.В. Хуторского. М.: ЦДО «Эйдос», 2009 // Режим доступа: http://eidos.ru/shop/ebooks/220515/index.htm. ISBN *978-5-904329-12-9.

3. Каннель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник. / А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи. – М.: МЦНМО, 1997. – 97 с.

4. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике в контексте синергетического подхода. September 10-12, 2010, Bachinovo, Bulgaria. – Интернет-ресурсы: режим доступа: http://www.fmi-plovdiv.org/GetResource?id = 681.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению 050100 Педагогическое образование. [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_09/prm788-1.pdf.

6. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: кн. для учащихся ст. классов сред. шк. / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

References

1. Bakulevskaja S.S. Stanovlenie intellektual'no-tvorcheskoj dejatel'nosti starsheklassnika v processe reshenija jevristicheskih zadach: Avtoref. dis. kand. ped. Nauk. – Volgograd: 2001. – 13 p.

2. Belonovskaja I.D. Jevristicheskaja zadacha kak sredstvo formirovanija professional'nyh umenij studentov jekonomicheskih special'nostej / I.D. Belonovskaja, L.G. Shabalina // Innovacii v obrazovanii: jevristicheskoe obuchenie [Jelektronnyj resurs]: Materialy Vseros. nauch.-prakt. konf., Moskva, 5-7 nojab. 2009 g. / Ros. akad. obrazovanija, Centr distanc. obrazovanija «Jejdos», Nauch. shk. A. V. Hutorskogo; pod red. A. V. Hutorskogo. M.: CDO «Jejdos», 2009 // Rezhim dostupa: http://eidos.ru/shop/ebooks/220515/index.htm. ISBN *978-5-904329-12-9.

3. Kannel'-Belov A. Ja. Kak reshajut nestandartnye zadachi. 60-ja Moskovskaja matematicheskaja olimpiada. Podgotovitel'nyj sbornik. / A.Ja. Kannel'-Belov, A.K. Koval'dzhi. M.: MCNMO, 1997. 97 p.

4. Skafa E.I. Jevristicheskoe obuchenie matematike v kontekste sinergeticheskogo podhoda. / E.I. Skafa. September 10--12, 2010, Bachinovo, Bulgaria. Internet-resursy: rezhim dostupa: http://www.fmi-plovdiv.org/GetResource?id = 681.

5. Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart vysshego professional'nogo obrazovanija po napravleniju 050100 Pedagogicheskoe obrazovanie. [Jelektronnyj resurs]. – 2009. Rezhim dostupa: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_09/prm788-1.pdf.

6. Fridman L.M. Kak nauchit'sja reshat' zadachi: kn. dlja uchawihsja st. klassov sred. shk. / L.M. Fridman, E. N. Tureckij. M.: Prosvewenie, 1989. 192 p.

Рецензенты:

Любичева В.Ф., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике Кузбасской государственной педагогической академии, г. Новокузнецк;

Мерлина Н.И., д.п.н., профессор кафедры прикладной математики Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Работа поступила в редакцию 01.06.2012.