

УДК 519.711.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ, ПОЛУЧАЕМОЙ БАНКОМ ЗА СЧЕТ РЕАЛИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Семенчин Е.А., Шаталова А.Ю.

*ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»,
Краснодар, e-mail: al-shatalova@yandex.ru*

В статье обобщена математическая модель максимизации прибыли получаемой банком от реализации m инвестиционных проектов к концу n -го месяца. Рассмотрен случай, когда инвестиционный фонд банка составляет заданный размер и не изменяется с течением времени. Приведены обобщенные формулы для вычисления индекса среднего риска, средней продолжительности инвестирования и динамики денежных средств по месяцам. Представлен пример максимизации прибыли получаемой банком за период инвестирования, равный 6 месяцам. Получены результаты с помощью MATLAB для 4 инвестиционных проектов с длительностью инвестирования 6 месяцев.

Ключевые слова: планирование инвестиций, инвестиционный проект, индекс риска, инвестиционный фонд, целевая функция, объем инвестирования

MATHEMATICAL MODEL OF PROFIT MAXIMIZATION, RECEIVED BY THE BANK THROUGH THE IMPLEMENTATION OF INVESTMENT PROJECTS

Semenchin E.A., Shatalova A.U.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: al-shatalova@yandex.ru

The article summarizes the mathematical model of profit maximization by the bank received from the m investment projects the end of the n -th month. The case when the investment fund of the bank is given by the sum and does not change over time. The generalized formula for calculating the index of average risk, average investment and the dynamics of money in months. An example of maximizing profits received by the bank for the investment period of 6 months. Results are obtained using MATLAB to 4 investment projects with a duration of 6 months of investment.

Keywords: investment planning, investment project, risk index, the investment fund, the objective function, the volume of investment

В статье [3] была предложена методика решения задачи о минимизации начальной кредитной суммы, выделяемой банком для инвестирования предложенных ему m проектов при различных способах инвестирования.

В данной работе подробно исследована тесно связанная с ней задача о максимизации прибыли, которую может получить банк при инвестировании тех же проектов, при фиксированном объеме инвестиционного фонда.

Постановка задачи

Инвестиционный фонд банка составляет s рублей. Банку необходимо распределить в течении n месяцев денежные средства инвестиционного фонда между имеющимися m инвестиционными проектами таким образом, чтобы полученная в конце прибыль была максимальна.

Под инвестициями будем понимать способ помещения банком капитала, который должен обеспечить ему положительную величину прибыли в заданный момент времени [4].

Согласно условиям банка, периодичность инвестирования им i -го проекта составляет k_i ($i = 1, 2, \dots, m$), величина

прибыли, которую он ожидает получить от реализации i -го проекта, составляет δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (в процентах), индекс риска i -го инвестиционного проекта составляет s_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

В течение каждого месяца средний индекс риска получения убытков от реализации рассматриваемых проектов s_{cp} на момент v ($v = 1, 2, \dots, n$) не должен превышать l , т.е. $s_{cp} \leq l$, кроме того в начале каждого v -го ($v = 1, 2, \dots, n$) месяца средняя продолжительность инвестирования проектов не должна превышать r месяцев. Подразумевается, что вложение всех денежных средств инвестиционного фонда в рассматриваемые проекты осуществляется в начале первого месяца. На следующих этапах денежные средства из процесса инвестирования не изымаются, а инвестируются повторно с учетом полученной прибыли. Предполагается, что все инвестиционные проекты будут реализованы в течение заданного отрезка времени.

Цель работы – построить математическую модель, позволяющую максимизировать прибыль банка, которую он ожидает получить к концу n -го месяца за счет инвестирования всех рассматриваемых инвестиционных проектов, если инвестицион-

ный фонд банка составляет фиксированную сумму денег (c рублей).

Математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов

Обозначим через $k_1, k_2, k_3, \dots, k_v, \dots, k_m$ – все возможные делители числа n , $k_m = n$, ($k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_m$), где k_i совпада-

ет с периодом инвестирования банком i -го ($i = 1, 2, \dots, m$) проекта, т. к. вложенные в проекты денежные средства инвестиционного фонда должны вернуться к концу n -го месяца, ($i = 1, 2, \dots, m-2$) – заключительный момент инвестирования i -го ($i = 2, 3, \dots, m-1$) проекта.

Все данные о рассматриваемых инвестиционных проектах представлены в табл. 1.

Таблица 1

Данные об инвестиционных проектах, реализуемых банком в течение n месяцев

Инвестиционные проекты	Периодичность инвестирования-проекта (мес.)	Моменты инвестирования проекта	Процент прибыли	Индекс риска
1	1	1, 2, 3, ..., n	δ_1	s_1
2	k_2	$\underbrace{1, 1+k_2, 1+2k_2, \dots, L_1}_{\frac{n}{k_2}}$ где $L_1 < n, n - L_1 < k_2$	δ_2	s_2
3	k_3	$\underbrace{1, 1+k_3, 1+2k_3, \dots, L_2}_{\frac{n}{k_3}}$ где $L_2 < n, n - L_2 < k_3$		s_3
...
v	k_v	$\underbrace{1, 1+k_v, 1+2k_v, \dots, L_{v-1}}_{\frac{n}{k_v}}$ где $L_{v-1} < n, n - L_{v-1} < k_v$	δ_v	s_v
...
m	n	1	δ_m	s_m

Обозначим через $X_\alpha(i)$ – объем инвестирования в момент α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) в инвестиционный проект i ($i = 1, 2, \dots, m$). В соот-

ветствии с табл. 1 для каждого i -го проекта переменная $X_\alpha(i)$ в каждый момент α будет иметь вид:

для 1-го проекта:

$$\underbrace{X_1(1), X_2(1), X_3(1), \dots, X_v(1), \dots, X_n(1),}_{n}$$

для 2-го проекта:

$$\underbrace{X_1(2), X_{1+k_2}(2), X_{1+2k_2}(2), \dots, X_{1+(v-1)k_2}(2), \dots, X_{L_1}(2),}_{\frac{n}{k_2}}$$

для 3-го проекта:

$$\underbrace{X_1(3), X_{1+k_3}(3), X_{1+2k_3}(3), \dots, X_{1+(v-1)k_3}(3), \dots, X_{L_2}(3),}_{\frac{n}{k_3}}$$

для v -го проекта:

$$\underbrace{X_1(v), X_{1+k_v}(v), X_{1+2k_v}(v), \dots, X_{1+(v-1)k_v}(v), \dots, X_{L_{v-1}}(v),}_{\frac{n}{k_v}}$$

для m -го проекта:

$$X_1(m),$$

(1)

где $n, \frac{n}{k_1}, \frac{n}{k_2}, \frac{n}{k_3}, \dots, \frac{n}{k_m} = 1$ – число различных объемов инвестирования в v -м месяце ($v = 1, 2, \dots, n$).

Индексы L_i ($i = 1, 2, \dots, (m-2)$) в выражениях (1) представляют собой заключительные (последние) моменты инвестирования проектов.

Условие максимизации объема денежных средств, вложенных банком в рассматриваемые проекты, будет иметь вид:

$$F = \sum_{j:k_j:n} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(j) \rightarrow \max_{A_j} \cdot (2)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы инвестирования

$$\sum_{j:k_j:2} (1+0,01\delta_j)X_{2-k_j+1}(j) - \sum_{j:k_j:2} X_3(j) = 0$$

– объемы вложений на конец второго месяца;

$$\sum_{j:k_j:v} (1+0,01\delta_j)X_{v-k_j+1}(j) - \sum_{j:k_j:v} X_{v+1}(j) = 0 \quad (4)$$

– объемы вложений на конец v -го месяца;

$$\sum_{j:k_j:(n-1)} (1+0,01\delta_j)X_{(n-1)k_j+1}(j) - \sum_{j:k_j:(n-1)} X_n(j) = 0$$

– объемы вложений на конец $n-1$ -го месяца;

где $\sum_{j:k_j:v}$ – означает суммирование по тем j ($j = 1, 2, \dots, m$), для которых k_j является делителем v , т.е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

$X_\alpha(i)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$). Согласно постановке задачи (см. п. 1), банк имеет c рублей для вложения в инвестиционные проекты. Согласно этому условию в первый месяц объем всех денежных средств инвестируемый в возможные инвестиционные проекты должен быть равен c руб.:

$$\sum_{j=1}^m X_1(j) = c \quad (3)$$

Поскольку объемы денежных средств, вложенные в v -м месяце, вместе с прибылью не будут изыматься банком из процесса инвестирования, а будут снова вложены в $v+1$ месяце, то соотношения, отражающие динамику вложения и отдачи денежных средств начиная со второго месяца, будут иметь вид:

Последнее соотношение не приводится только для $n-1$ месяца, т.к. вложения, согласно постановке задачи, не будут осуществляться в $(n+1)$ -м месяце.

Согласно формуле для вычисления индекса среднего риска для первого периода времени индекс среднего риска, не превышающий величины l , удовлетворяет неравенству [5]:

$$\frac{X_1(1)s_1 + X_1(2)s_2 + \dots + X_1(m)s_m}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq l$$

для второго периода –

$$\frac{X_2(1)s_1 + X_2(2)s_2 + \dots + X_2(m)s_m}{X_2(1) + X_2(2) + \dots + X_2(m)} \leq l,$$

.....
для периода v ($v \neq 1$), –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(j)s_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j-i:(v-1)} X_\psi(j)s_j + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)s_j}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j-i:(v-1)} X_\psi(j) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)} \leq l, \quad (5)$$

.....
для периода n –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(j)s_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j-i:(v-1)} X_\psi(j)s_j + X_1(m)s_m}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j-i:(v-1)} X_\psi(j) + X_1(m)} \leq l,$$

где $\sum_{j/k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)}$ – означает суммирование по тем j ($j = 1, 2, \dots, m$), для которых $k_j < v$ и k_j является делителем $(v-1)$, $\sum_{j/k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)}$ – означает суммирование по тем j ($j = 1, 2, \dots, m$), для которых $k_j < v$ и k_j не является

делителем $(v-1)$, ψ – индекс, совпадающий с индексом слагаемого из предыдущего соотношения для $(v-1)$ -го периода, которое зависит от того же j -го ($j = 1, 2, \dots, m$) инвестиционного проекта, т.е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Из соотношений (5) следует:

$$(s_1 - l)X_1(1) + (s_2 - l)X_1(2) + \dots + (s_m - l)X_1(m) \leq 0;$$

$$\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)} X_v(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)(s_j - l) \leq 0; \quad (6)$$

$$(s_1 - l)X_n(1) + \dots + (s_m - l)X_1(m) \leq 0.$$

Согласно формуле для вычисления средней продолжительности инвестирования, средняя продолжительность инвестирования в течение первого месяца, учитывая, что она не должна превосходить r , имеет вид [5]:

$$\frac{X_1(1) + X_1(2)k_2 + \dots + X_1(m)n}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq r,$$

второго месяца –

$$\frac{X_2(1) + X_1(2)(k_2 - 1) + \dots + X_1(m)(n - 1)}{X_2(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq r,$$

.....
 месяца v ($v \neq 1$), –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)} X_v(j)k_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j)(k_j - (v-1)) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)(k_j - (v-1))}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)} X_v(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)} \leq r, \quad (7)$$

.....
 месяца n –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)} X_v(j)k_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j)(k_j - (v-1)) + X_1(m)}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)} X_p(j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)} X_\psi(j) + X_1(m)} \leq r,$$

где $\sum_{j/k_j < v \wedge k_j \neq (v-1)}$ – означает суммирование по тем j ($j = 1, 2, \dots, m$), для которых $k_j < v$ и k_j является делителем $(v-1)$, $\sum_{j/k_j < v \wedge k_j \neq i(v-1)}$ – означает суммирование по тем j ($j = 1, 2, \dots,$

m), для которых $k_j < v$ и k_j не является делителем $(v-1)$, ψ – индекс, совпадающий с индексом слагаемого из предыдущего соотношения для $(v-1)$ -го периода, которое зависит от того же j -го ($j = 1, 2, \dots, m$) инвестиционного проекта, т.е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Из неравенств (7) следует:

$$(1-r)X_1(1) + (k_2 - r)X_1(2) + \dots + (n-r)X_1(m) \leq 0, \quad (8)$$

$$\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(j)(k_j - r) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j - i:(v-1)} X_\psi(j)((k_j - (v-1)) - r) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(j)((k_j - (v-1)) - r) \leq 0,$$

$$(1-r(v))X_n(1) + \dots + (n-r(v))X_1(m) \leq 0.$$

Очевидно, что:

$$X_1(1) \geq 0, X_2(1) \geq 0, X_3(1) \geq 0, \dots, X_v(1) \geq 0, \dots, X_n(1) \geq 0;$$

$$X_1(2) \geq 0, X_{1+k_2}(2) \geq 0, X_{1+2k_2}(2) \geq 0, \dots, X_{1+v k_2}(2) \geq 0, \dots, X_{L_1}(2) \geq 0;$$

$$X_1(3) \geq 0, X_{1+k_3}(3) \geq 0, X_{1+2k_3}(3) \geq 0, \dots, X_{1+v k_3}(3) \geq 0, \dots, X_{L_2}(3) \geq 0; \quad (9)$$

$$X_1(v) \geq 0, X_{1+k_v}(v) \geq 0, X_{1+2k_v}(v) \geq 0, \dots, X_{1+v k_v}(v) \geq 0, \dots, X_{L_{v-1}}(v) \geq 0;$$

$$X_1(m) \geq 0;$$

где индексы L_i ($i = 1, \dots, (m-2)$) – это заключительные моменты инвестирования проектов.

Соотношения (2), (3), (4), (6), (8), (9) представляют собой математическую модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов.

Пример

Необходимо максимизировать денежные средства инвестиционного фонда банка размером в 500 000 рублей к концу 6-го месяца. Банк остановился на 4-х инвестиционных проектах предприятий.

Периодичность финансирования имеющихся инвестиционных проектов составляет 1, 2, 3 и 6 месяцев. Процент прибыли по проектам составляет соответственно 1,5; 3,5; 6; 11. Индексы рисков для каждого инвестиционного проекта составляют соответственно 1, 4, 9, 7.

При имеющихся инвестиционных проектах и размере инвестиционного фонда необходимо разработать модель, максимизирующую сумму денег, которую банк получит по окончании инвестирования проектов, учитывая, что в течение каждого месяца средний индекс риска проектов не превышает 6, и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных средств в проекты не превышает 2,5 месяцев [1].

Оптимальное решение, найденное с помощью разработанной программы в среде MatLab [2], имеет вид:

$$F = 866443.$$

$$X_1(A_1) = 178571, X_2(A_1) = 465165,$$

$$X_3(A_1) = 0, X_4(A_1) = 0, X_5(A_1) = 0,$$

$$X_1(A_2) = 0, X_3(A_2) = 472143, X_5(A_2) = 488668,$$

$$X_1(A_3) = 285714, 302857, X_1(A_4) = 35714.$$

Общий доход банка от реализации инвестиционных проектов составил 866443 рублей, общая прибыль составила 366 446 рублей.

Список литературы

1. Адамчук А.С., Аммироков С.Р., Щепотьева С.В. Динамическая модель планирования инвестиций в форме задачи линейного программирования // Вестник СевКавГТУ. – 2004. – №1.
2. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
3. Семенчин Е.А., Шаталова А.Ю.: Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков // Фундаментальные исследования. Экономические науки. – 2011 – №12 (часть 1).
4. Ткаченко И.Ю. Инвестиции: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / И.Ю. Ткаченко, Н.И. Малых. – М.: Издательский центр-академия, 2009. – 240 с.
5. Хачатрян С.Р., Пинешня М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

References

1. Adamchuk A.S., Amirokov S.R., Wepot'eva S.V. Dinamicheskaja model' planirovanija investicij v forme zadachi linejnogo programmirovanija // Vestnik SevKavGTU. 2004. no. 1.
2. Ketkov Ju. L., Ketkov A. Ju., Shul'c M. M. MATLAB 7: programmirovanie, chislennye metody. SPb.: BHV-Peterburg, 2005. 752 p.
3. Semenchin E.A., Shatalova A.Ju.: Obobwennaja matematicheskaja model' investirovanija predpriyatij s uchetom riskov // Fundamental'nye issledovanija. Jekonomicheskie nauki. 2011 no. 12 (chast' 1).
4. Tkachenko I. Ju. Investicii: ucheb. posobie dlja stud. vyssh. ucheb. zavedenij, I. Ju. Tkachenko, N. I. Malyh. M. : Izdatel'skij cent-akademija, 2009. 240 p.
5. Hachatryan S.R., Pineshnja M.V., Bujanov V.P. Metody i modeli reshenija jekonomicheskikh zadach. M.: Jekzamen, 2005. 384 p.

Рецензенты:

Усатииков С.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры общей математики ГОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», г. Краснодар;

Дударев Ю.И., д.т.н., профессор, ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 16.01.2012.