

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ СОЕДИНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ МКЭ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

**Николаев А.П., Киселёв А.П., Гуреева Н.А., Киселёва Р.З., Леонтьева В.В.**

*ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет»,*

*Волгоград, e-mail: vhs2010@yandex.ru*

Для определения напряженно-деформированного состояния в зонах пересечения осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе метода конечных элементов используется ранее разработанный кольцевой объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме четырехугольника с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных. Для конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек вращения, получены соотношения между узловыми неизвестными одной оболочки, принятой за основную, и узловыми неизвестными другой оболочки, примыкающей к основной. На основе полученных соотношений выполнены преобразования матриц жесткости и векторов узловых нагрузок конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек вращения. Рассмотрены два случая: оболочки вращения из однородного материала и оболочки вращения из разнородных материалов.

**Ключевые слова:** МКЭ, осесимметрично нагруженные оболочки вращения, объёмный конечный элемент, узловые неизвестные, условия на границе пересечения оболочек, однородный материал, разнородный материал

## STRESS DEFINITION IN ZONE COUPLING OF SHELLS OF ROTATION ON THE BASIS OF METHOD OF FINITE ELEMENTS AT SYMMETRICALLY AXES LOADING

**Nikolaev A.P., Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Leonteva V.V.**

*Volgograd state agricultural University, Volgograd, e-mail: vhs2010@yandex.ru*

For definition of the is stress-deformed condition in coupling zones symmetrically axes the loaded shells of rotation on the basis of a method of finite elements earlier developed ring volume finite element with cross-section section in the form of a quadrangle with nodal unknown in the form of displacement and their derivatives is used. For the finite elements adjoining border of a joint of covers of rotation, parities between nodal unknown of one shells accepted for basic, and nodal unknown of other shells adjoining basic are received. On the basis of the received parities transformations of matrixes of rigidity and vectors of usual loadings of the finite elements adjoining border of a joint of shells of rotation are executed. Two cases are considered: shells of rotation from a homogeneous material and a shells of rotation from inhomogeneous materials.

**Keywords:** symmetrically axes loading the loaded covers of rotation, a volume finite element, usual unknown persons, conditions on border of crossing of the covers, a homogeneous material, a inhomogeneous material

1. Матрица жесткости объёмного конечного элемента. В настоящее время в расчетах оболочек вращения при осесимметричном нагружении широкое распространение получил метод конечных элементов в трехмерной постановке [1, 2, 3, 4]. В данной работе этот подход адаптирован для получения матрицы жесткости конечного элемента оболочки вращения при осесимметричной нагрузке. Для расчета осесимметрично нагруженной оболочки вращения используется кольцевой объемный конечный элемент, поперечным сечением которого является четырехугольник с узлами  $i, j, k, l$  [1].

$$\begin{aligned} \{v_y^I\}^T &= \{v^{li} \ v^{lj} \ v^{lk} \ v^{ll} \ v_{,s}^{li} \ v_{,s}^{lj} \ v_{,s}^{lk} \ v_{,s}^{ll} \ v_{,\zeta}^{li} \ v_{,\zeta}^{lj} \ v_{,\zeta}^{lk} \ v_{,\zeta}^{ll}\}; \\ \{v_y^J\}^T &= \{v^j \ v^j \ v^k \ v^l \ v_{,s}^i \ v_{,s}^j \ v_{,s}^k \ v_{,s}^l \ v_{,\zeta}^i \ v_{,\zeta}^j \ v_{,\zeta}^k \ v_{,\zeta}^l\}; \end{aligned}$$

$[K]$  – матрица жесткости элемента в глобальной системе координат;  $\{f\}$  – вектор узловых нагрузок элемента в глобальной системе координат.

Используемая в настоящей работе матрица жесткости конечного элемента формируется на основе равенства работ внешних и внутренних сил при осесимметричном нагружении [2]

$$[K]_{24 \times 24} [V_y]_{1 \times 24} = [f]_{24 \times 1}, \quad (1)$$

где  $\{V_y\}^T = \{v_y^I\}^T \{v_y^J\}^T$  – вектор узловых неизвестных в криволинейной системе координат  $s, \zeta$ ;

2. Геометрия в зоне пересечения осесимметрично нагруженных оболочек вращения из однородного материала. Рассматриваются две осесимметрично нагруженные обо-

лочки вращения в координатах  $xoz$  и  $x'o'z'$  (рис. 1). Связь между ортами этих систем считается известной

$$\{\vec{i}\} = [l]\{\vec{i}'\}. \quad (2)$$

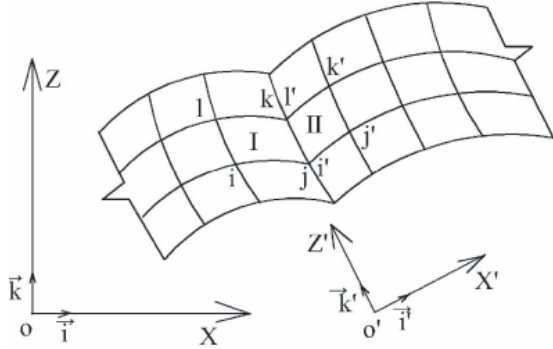


Рис. 1. Сочлененные оболочки вращения в декартовых системах координат  $xoz$  и  $x'o'z'$

На основании (2) определяется соотношение между векторами локальных базисов в граничной точке сочлененных оболочек

$$\{\vec{a}\} = [h]\{\vec{a}'\}, \quad (3)$$

где 
$$\{\vec{a}\}^T = \{\vec{a}_1, \vec{a}\},$$
  

$$\{\vec{a}'\}^T = \{\vec{a}'_1, \vec{a}'\}.$$

В узлах на границе пересечения оболочек узловые неизвестные одной оболочки (элемент I) принимаются за основные (см. рис. 1), узловые неизвестные примыкающей оболочки (элемент II) должны быть выражены через узловые неизвестные основной оболочки. В дальнейшем величины, относящиеся к примыкающей оболочке, будут отмечаться штрихами.

Для конечных элементов примыкающих к границе сочленения оболочек выполня-

$$v_{,s} = \vec{a}_1 (v_{,s}^1 + v^1 m_{11} + v m_{21}) + \vec{a} (v^1 m_{12} + v_{,s} + v m_{22}) = d^1 \vec{a}_1 + d\vec{a}; \quad (10)$$

$$\vec{v}_{, \zeta} = (v^1 \vec{a}_1 + v\vec{a})_{, \zeta} = v_{, \zeta}^1 \vec{a}_1 + v_{, \zeta} \vec{a}.$$

В соотношениях (10) использовано выражение производных векторов узловой точки в виде

$$\{\vec{a}_{,s}\}^T = [m]\{\vec{a}\}^T, \quad (11)$$

где 
$$\{\vec{a}_{,s}\}^T = \{\vec{a}_{1,s}, \vec{a}_{,s}\}.$$

Равенство (8) с использованием (10) запишется в виде

$$d^1 \vec{a}'_1 + d'\vec{a}' = \vec{a}'_1 \left[ \vec{a}_1 (d^1 \vec{a}_1 + d\vec{a}) + \vec{a} (v^1_{, \zeta} + \vec{a}_1 + v\vec{a}) \right],$$

откуда получается:

$$d^1 = d^1 h_{11} h_{11} + d h_{11} h_{21} + v^1_{, \zeta} h_{21} h_{11} + v_{, \zeta} h_{21} h_{11};$$

$$d' = d^1 h_{11} h_{12} + d h_{22} h_{11} + v^1_{, \zeta} h_{21} h_{12} + v_{, \zeta} h_{21} h_{22}. \quad (12)$$

ются перенумерации неизвестных и рассматриваются следующие векторы узловых неизвестных для основной и примыкающей оболочек

$$\{q^0\}^T = \{v^1, v_{,s}^1, v_{, \zeta}^1, v, v_{,s}, v_{, \zeta}\}; \quad (4)$$

$$\{q^{0'}\}^T = \{v^1', v_{,s'}^1, v_{, \zeta'}^1, v', v_{,s'}, v_{, \zeta'}\}, \quad (5)$$

где  $\varpi = j, k; \quad \varpi' = i', l'.$

Соотношения между компонентами векторов (4) и (5) определяются с использованием следующих условий:

1. Векторы перемещений в точке, расположенной на границе пересечения двух оболочек, равны

$$v^1 \vec{a}'_1 + v' \vec{a}' = v^1 \vec{a}_1 + v\vec{a},$$

откуда с учётом (3) получается

$$v^1 = v^1 h_{11} + v h_{21}; \quad v' = v^1 h_{12} + v h_{22}. \quad (6)$$

Зависимости между производными компонент вектора перемещений для двух оболочек на линии пересечения можно получить, используя выражения производной вектора по направлению

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial s'_\alpha} = a'_\alpha \nabla \vec{v}, \quad (7)$$

где 
$$\nabla \vec{v} = \vec{a}_\alpha \frac{\partial \vec{v}}{\partial s_\alpha}.$$

Используя выражение (7), можно записать соотношения:

$$\vec{v}'_{,s'} = \vec{a}'_1 \nabla \vec{v}; \quad (8)$$

$$\vec{v}'_{, \zeta'} = \vec{a}' \nabla \vec{v}. \quad (9)$$

Производные векторов перемещений определяются выражениями:

Используя выражение (10), можно выразить из (12) производные компонент вектора пере-

мещений  $\vec{v}'_{,s'}$ ,  $\vec{v}'_{,\zeta'}$ , примыкающей оболочки через узловые неизвестные основной оболочки

$$\begin{aligned} v'_{,s'} &= v(h_{11}h_{11}m_{11} + h_{21}h_{11}m_{22} - m_{21}) + v^1(h_{11}h_{11}m_{11} + h_{21}h_{11}m_{12} - m_{11}) + \\ &+ v^1_{,s} h_{11}h_{11} + v^1_{,\zeta} h_{21}h_{11} + v_{,\zeta} h_{21}h_{21} + v_{,s} h_{11}h_{21}; \\ v'_{,\zeta'} &= v(h_{11}h_{12}m_{11} + h_{22}h_{11}m_{22} - m_{22}) + v^1(h_{11}h_{12}m_{11} + h_{22}h_{11}m_{12} - m_{12}) + \\ &+ v^1_{,s} h_{11}h_{12} + v^1_{,\zeta} h_{21}h_{12} + v_{,\zeta} h_{21}h_{22} + v_{,s} h_{22}h_{11}. \end{aligned} \tag{13}$$

Равенство (9) с использованием (10) получит вид

$$\begin{aligned} v'_{,\zeta'} &= d^1 h_{11}h_{21} + dh_{12}h_{21} + v^1_{,\zeta} h_{22}h_{11} + v_{,\zeta} h_{22}h_{21}; \\ v'_{,\zeta'} &= d^1 h_{12}h_{21} + dh_{12}h_{22} + v^1_{,\zeta} h_{22}h_{11} + v_{,\zeta} h_{22}h_{22}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя выражение (10), можно выразить из (14) производные компонент вектора пере-

мещений  $\vec{v}'_{,\zeta'}$ ,  $\vec{v}'_{,s'}$ , примыкающей оболочки через узловые неизвестные основной оболочки

$$\begin{aligned} v'_{,\zeta'} &= v(h_{12}h_{11}m_{21} + h_{12}h_{11}m_{22}) + v^1(h_{12}h_{11}m_{11} + h_{12}h_{11}m_{12}) + \\ &+ v^1_{,s} h_{12}h_{11} + v^1_{,\zeta} h_{22}h_{11} + v_{,\zeta} h_{22}h_{21} + v_{,s} h_{12}h_{11}; \\ v'_{,s'} &= v(h_{12}h_{12}m_{21} + h_{12}h_{22}m_{22}) + v^1(h_{12}h_{12}m_{11} + h_{12}h_{22}m_{12}) + \\ &+ v^1_{,s} h_{12}h_{12} + v^1_{,\zeta} h_{22}h_{12} + v_{,\zeta} h_{22}h_{22} + v_{,s} h_{12}h_{22}. \end{aligned} \tag{15}$$

На основании выражений (6), (13), (15) зависимость между векторами (4) и (5) запишется матричным выражением

$$\{q^{\sigma'}\}_{6 \times 1} = [Z] \{q^{\sigma}\}_{6 \times 6}. \tag{16}$$

С использованием (16) формируется матрица преобразования [T] для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок примыкающих конечных элементов осесимметрично нагруженных оболочек вращения

$$\begin{aligned} [K'] &= [T]^T [K] [T]; \\ \{f'\} &= [T]^T \{f\}. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Геометрия в зоне пересечения осесимметрично нагруженных оболочек вращения из разнородных материалов. При сопряжении осесимметрично нагруженных оболочек вращения из разнородных материалов положение плоскости раздела считается заданной (рис. 2). В узловой точке, расположенной на границе плоскости раздела, определяются углы  $\alpha$ ,  $\beta$  между локальными базисами узловых точек сопрягаемых оболочек и единичными векторами  $\vec{\rho}, \vec{\tau}$  (нормальным и касательным к граничной плоскости оболочек).

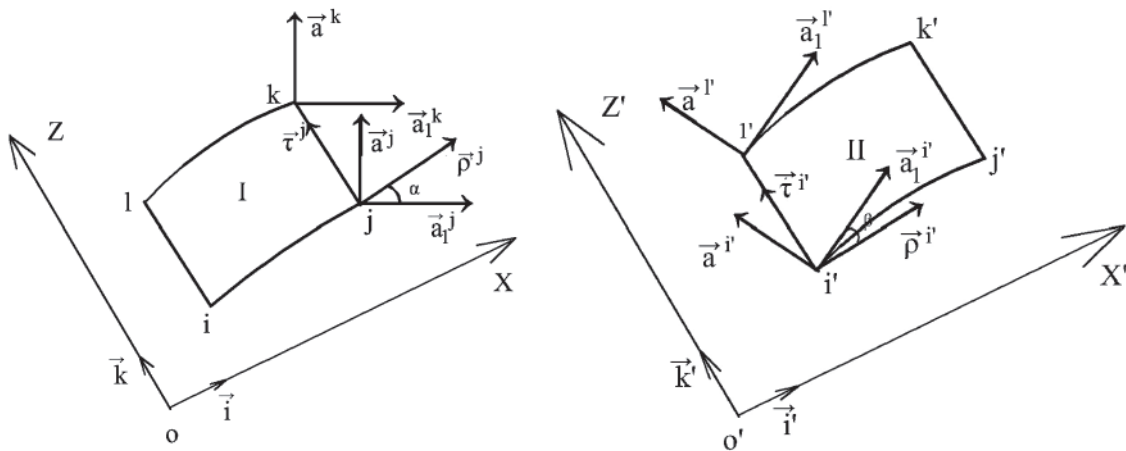


Рис. 2. Конечные элементы сопрягаемых оболочек вращения

В граничной узловой точке рассматриваются следующие векторы узловых перемещений

$$\{v_y\} = \{v^{11} v_s v_\zeta v v_s v_\zeta\}; \quad (18)$$

$$\{v'_y\} = \{v'^1 v'^s v'^\zeta v'^v v'^s v'^\zeta\}; \quad (19)$$

$$\{v^p\} = \{v^p v_\rho^p v_\tau^p v^\tau v_\rho^\tau v_\tau^\tau\}; \quad (20)$$

$$\{v^{p'}\} = \{v^{p'} v_\rho^{p'} v_\tau^{p'} v^{\tau'} v_\rho^{\tau'} v_\tau^{\tau'}\}. \quad (21)$$

Матричные соотношения между векторами (18), (20) и (19), (21) определяются по методике, описанной в пункте 2, и представляются выражениями:

$$\{v'_y\}^T = [z_1] \{v_y\}; \quad (22)$$

$$\{v^{p'}\}^T = [z_2] \{v^p\}. \quad (23)$$

Соотношения между векторами (18), (20) определяются с использованием следующих условий.

1. Условие о равенстве векторов перемещений в граничной точке в различных системах координат приводит к соотношениям

$$v^{p'} = v^p; \quad v^{\tau'} = v^\tau. \quad (24)$$

$$D'_{11} \epsilon'_{\rho\rho} + D'_{12} \epsilon'_{\theta\theta} + D'_{13} \epsilon'_{\tau\tau} = D_{11} \epsilon_{\rho\rho} + D_{12} \epsilon_{\theta\theta} + D_{13} \epsilon_{\tau\tau},$$

откуда получается

$$v_{\rho}^{p'} = \frac{D_{11}}{D'_{11}} \frac{\partial v^p}{\partial s_\rho} + \frac{v^\tau}{\rho} \frac{D_{12}}{D'_{11}} + \frac{D_{13}}{D'_{11}} \frac{\partial v^\tau}{\partial s_\tau} - \frac{D'_{12}}{D'_{11}} v_{\tau}^\tau - \frac{v^\tau}{\rho'} \frac{D_{12}}{D'_{11}}, \quad (28)$$

где  $E, E'$  – модули упругости материалов;  $v, v'$  – коэффициенты Пуассона.

На основании выражений (24), (25), (26) и (28) зависимость между векторами (18) и (20) запишется в матричном виде

$$\{v^{p'}\} = [z^p] \{v_y\}. \quad (29)$$

С учетом выражений (29), (22) и (23) можно получить матричное соотношение между векторами (18) и (20) сопрягаемых криволинейных пластин из разнородных материалов

$$\{v'_y\} = [z'_2] [z^p] [z_1]^{-1} \{v_y\} = [L] \{v_y\}. \quad (30)$$

С использованием (30) формируется матрица преобразования  $[T]$  для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок граничного конечного элемента примыкающей пластины

$$\begin{aligned} [K'] &= [T]^T [K] [T]; \\ \{f'\} &= [T]^T \{f\}. \end{aligned} \quad (31)$$

2. Равенство производных компонент вектора перемещения вдоль оси  $\tau$  дает выражения

$$v_{\tau}^{\tau'} = v_{\tau}^\tau; \quad v_{\tau}^{\rho'} = v_{\tau}^\rho. \quad (25)$$

3. Условия равенства касательных напряжений в плоскости раздела материалов

$$\sigma^{\rho\tau'} = \sigma^{\rho\tau} \Rightarrow D'_{44} (v_{\tau}^{\rho'} + v_{\rho}^{\tau'}) = D_{44} (v_{\tau}^\rho + v_{\rho}^\tau)$$

приводит к выражению

$$v_{\tau}^{\rho'} = v_{\tau}^\rho \frac{D_{44}}{D'_{44}} + v_{\rho}^\tau \left( \frac{D_{44}}{D'_{44}} - 1 \right). \quad (26)$$

При получении выражения (26) использован закон Гука в матричном виде [5]

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}, \quad (27)$$

$$\text{где } \{\sigma\}^T = \{\sigma^{\rho\rho} \sigma^{\theta\theta} \sigma^{\tau\tau} \sigma^{\rho\tau}\};$$

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{\rho\rho} \epsilon_{\theta\theta} \epsilon_{\tau\tau} 2\epsilon_{\rho\tau}\}.$$

4. Равенство нормальных напряжений в системе координат  $\rho, \tau$   $\sigma^{\rho\rho'} = \sigma^{\rho\rho}$  приводит к соотношению

**Пример.** Определялось напряженно-деформированное состояние цилиндра со сферическим днищем, находящегося под внутренним давлением интенсивности  $q$  (рис. 3). Представлены два варианта расчета: 1 – цилиндр и сферическая оболочка из однородного материала; 2 – цилиндр и сферическая оболочка из разнородных материалов.

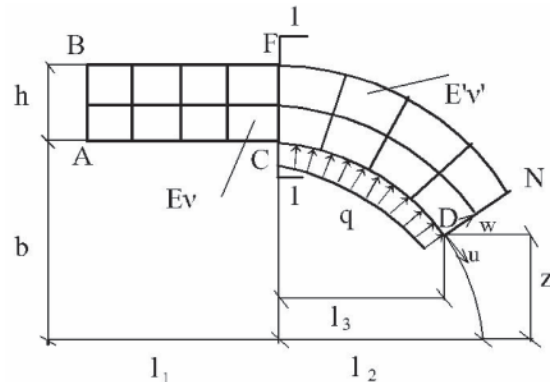


Рис. 3. Цилиндр со сферическим днищем под внутренним давлением интенсивности  $q$

Были приняты следующие исходные данные:

1 вариант –  $l_1 = 0,1$  м,  $l_2 = 0,05$  м,  $l_3 = 0,04$  м,  $q = 8$  Н,  $h = 0,0005$  м,  $b = 0,05$  м,  $E = 2 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0,3$ ;

2 вариант –  $l_1 = 0,1$  м,  $l_2 = 0,05$  м,  $l_3 = 0,04$  м,  $q = 8$  Н,  $h = 0,0005$  м,  $b = 0,05$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $E' = 2 \cdot 10^6$  МПа,  $\nu' = 0,25$

Сходимость вычислительного процесса была достаточной при разбиении конструкции на 5 элементов по толщине, на 40 по

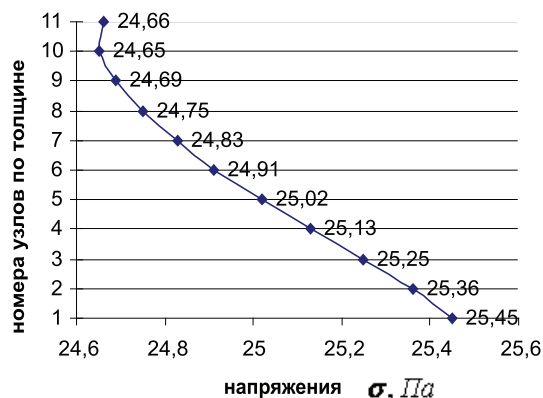


Рис. 4а. Эпюра нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечении 1-1 цилиндра со сферическим днищем из однородного материала

Для 1-го варианта – условие равновесия по силам ( $\sum X = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,6\%$ ; для 2-го варианта – условие равновесия по силам ( $\sum X = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,7\%$ .

На основе анализа результатов выполненных примеров расчета можно сделать вывод о корректности алгоритма определения напряженно-деформированного состояния в зонах сочленения оболочек вращения на основе разработанного конечного элемента [1].

#### Список литературы

1. Гуреева Н.А. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента / Н.А. Гуреева, А.П. Киселев, Р.З. Киселева // Известия ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – № 4. – С. 125–128.
2. Киселев А.П. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемного конечного элемента / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2010. – № 1. – С. 106–112.
3. Киселев А.П. Использование трёхмерных конечных элементов в расчётах прочности многослойных панелей / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 37–40.
4. Киселев А.П. Объемный конечный элемент в виде треугольной призмы с первыми производными узловых перемещений / А.П. Киселев, А.П. Николаев // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2006. – № 1. – С. 13–18.
5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.

длине цилиндра и 25 по длине дуги круговой оболочки.

Для повышения точности выполнения условий равновесия рассчитываемая конструкция разбивалась на 11 конечных элементов по толщине и на 100 элементов по длине цилиндра и на 75 по дуге круговой оболочки.

По полученным результатам построены эпюры нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечении 1-1 (см. рис. 3): для 1-го варианта (рис. 4а), для 2-го варианта (рис. 4б)

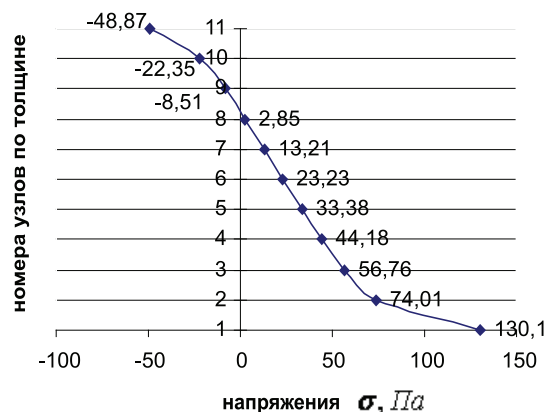


Рис. 4б. Эпюра нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечении 1-1 цилиндра со сферическим днищем из разнородных материалов

#### References

1. Gureeva N.A., Calculation of a multilayered cover with use of a volume finite element / N.A. Gureeva, R.Z. Kiselyov, A.P. Kiselyov // Izvestija VolgGTU. Volgograd. 2010. no. 4. pp. 125–128.
2. Kiselyov A.P. Analysis of multilayer shells of rotation and plates with use of a three-dimensional finite element / A.P. Kiselyov, N.A. Gureeva, R.Z. Kiseleva // Izv. Higher education institutions, it is gray. «Construction». 2010. no. 1. pp. 106–112.
3. Kiselyov A.P. The application of three – dimensional finite elements for strength analysis of multilayer plates / A.P. Kiselyov, N.A. Gureeva, R.Z. Kiseleva // Bulletin RYFP, Release, a series «Engineering researches», 2009. no. 4. pp. 37–40.
4. Kiselyov A.P. A volume final element in the form of a triangular prism with the first derivatives of central movings / A.P. Kiselyov, A.P. Nikolaev // Izv. Higher education institutions, it is gray. «Construction». 2006. no. 1. pp. 13–18.
5. Samul V.I. Bases of the theory of elasticity and plasticity. M.: Higher school, 1970. pp. 288.

#### Рецензенты:

Голованов В.К., д.т.н., ст. н.с. кафедры «Начертательная геометрия и компьютерная графика» ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный технический университет», г. Волгоград;

Беликов Г.И., д.т.н., профессор кафедры «Соппротивление материалов» ФООГУ Волгоградского архитектурного университета, г. Волгоград.

Работа поступила в редакцию 09.04.2012.